Aufgaben (mit Hinweisen) zur Logik (19.4.)

2.2 Zeigen Sie:

$$\models \bigvee_{i \leq n} A_i \to \bigwedge_{i \leq m} B_j$$

genau dann, wenn für alle $i \leq n, j \leq m$ gilt: $\models A_i \to B_j$.

Hinweis. Bedenke, daß $\mathsf{Bool} = \{0, 1\}$ ein Verband ist, mit den Operationen $\wedge$ und $\vee$ als inf und sup.
Was ist $X \to Y$? Antwort: $X \leq Y$.
Schreibe die Behauptung so auf, daß nur noch die Operationen inf, sup, $\leq$ benutzt werden, und beweise die Aussage für einen *beliebigen* Verband. Denke dabei z. B. an die reellen Zahlen mit dem üblichen $\leq$.

X ist eine Menge von Formeln, A, B sind Formeln. Zeigen Sie:

4.1 Wenn es B gibt, so daß gleichzeitig

$$X \cup \{\neg A\} \models B \quad \text{und} \quad X \cup \{\neg A\} \models \neg B$$

gilt, dann ist $X \models A$.

Hinweis. Bezeichne $Y = X \cup \{\neg\}$. Zeige, daß unter diesen Voraussetzungen $\mathsf{Mod}\ (Y) = \emptyset$. (Das heißt, die Menge Y ist semantisch inkonsistent.)
Zu zeigen ist $\mathsf{Mod}\ (X) \subseteq \mathsf{Mod}\ (A)$. Beweise und benutze $\mathsf{Mod}\ (X \cup \{\neg A\}) = \mathsf{Mod}\ (X) \cap \mathsf{Mod}\ (\neg A)$.

4.2 Wenn $X \cup \{\neg B\} \models \neg A$, dann $X \cup \{A\} \models B$.

4.3 Wenn $X \models A$, dann $X \models B \to A$.

4.4 Aus der Menge $X = \{p, q, q \to \neg p\}$ folgt jede Formel A.