Axiomatische Geometrie

Johannes Waldmann

16. Mai 2000

Zusammenfassung

Zur Ergänzung der Logik–Seminare stelle ich hier einige Axiome und Modelle für einige ebene Geometrien zusammen. Das verdeutlicht einerseits die Anwendung der Prädikatenlogik bei der exakten Fundierung der Mathematik, und soll andererseits zu geometrischer Beschäftigung inspirieren.

1 Bezeichnungen

Nehmen wir die Formel "je zwei verschiedene Punkte liegen auf genau einer Geraden". Wir möchten das schreiben als

$$\forall p \forall q \; p \neq q \rightarrow \exists! g \; p \in g \wedge q \in g$$

Ganz so einfach geht es aber nicht.

"genau ein g" haben wir bezeichnet durch $\exists! g$. So ein Zeichen gibt es nicht, aber wir können $\exists! g R(g)$ auffassen als Abkürzung für

$$\exists g R(g) \wedge \forall h \; R(h) \rightarrow h = g$$

Das geht also doch.

Etwas weiter ausholen müssen wir hier: "$p \in g$" soll ja bedeuten, daß p ein Punkt ist und g eine Menge von Punkten. Das geht in der Prädikatenlogik erster Ordnung *nicht*, denn wir haben nur ein Universum U, und Teilmengen von U sind nicht selbst wieder Elemente von U.

Der Ausweg ist, das Universum U aus der Vereinigung der Menge aller Punkte und der Menge aller Geraden bestehen zu lassen. Dann dürfen wir aber nicht mehr $p \in g$ schreiben, denn es ist eben keine "Element–von"–Beziehung. Stattdessen wählen wir ein zweistelliges Relationssymbol $\mathbf{I}$ (für "Inzidenz") und schreiben $p \, \mathbf{I} \, g$.

Vorsicht ist immer noch geboten: Eine Formel wie $\forall p \ldots$ ist eine Aussage über *alle* Dinge des Universums, also Punkte *und* Geraden. Das ist nicht beabsichtigt, wir müssen deswegen so schreiben

$$\forall p \; \mathsf{punkt}(p) \rightarrow \forall q \; \mathsf{punkt}(q) \rightarrow (p \neq q \rightarrow \exists! g \; \mathsf{gerade}(g) \wedge p \, \mathbf{I} \, g \wedge q \, \mathbf{I} \, g)$$

Für Programmierer: unsere Sprache hat keine Typen, deswegen müssen wir "zur Laufzeit" vor jeder Variablenbenutzung den Typ von Hand testen. Natürlich brauchen wir dazu noch das Axiom

$$\forall x\ \mathsf{punkt}(x) \leftrightarrow \neg\mathsf{gerade}(x)$$

Nachdem wir das alles besprochen haben, treffen wir trotzdem die Vereinbarung, daß wir manchmal nur $p\,\mathbf{I}\,g$ schreiben und damit automatisch $\mathsf{punkt}(p) \wedge \mathsf{gerade}(g) \wedge p\,\mathbf{I}\,g$ meinen. (Wir denken uns also einen Präprozessor, der die Typprüfungen automatisch einfügt.)

2 Affine Geometrie

Wir beginnen mit dem schon erwähnten Axiom

$$A1 \qquad \forall p\ \mathsf{punkt}(p) \to \forall q\ \mathsf{punkt}(q) \to (p \neq q \to \exists! g\ \mathsf{gerade}(g) \wedge p\,\mathbf{I}\,g \wedge q\,\mathbf{I}\,g)$$

(je zwei verschiedene Punkte bestimmen genau eine Gerade.) Was ist mit zwei verschiedenen Geraden? Die können sich schneiden oder auch nicht (dann sind sie parallel). Wir definieren $g||h$ als Abkürzung für

$$g = h\ \vee\ \neg\exists p\ p\,\mathbf{I}\,g \wedge p\,\mathbf{I}\,h$$

In der üblichen Euklidischen Geometrie gilt das Parallelenaxiom:

$$A2 \qquad \forall g\ \mathsf{gerade}(g) \to \forall p\ \mathsf{punkt}(p) \to \exists! h\ \mathsf{gerade}(h) \wedge g||h$$

Beachte: es kann auch $p\,\mathbf{I}\,g$ sein, dann nehmen wir eben $h = g$.

Übung: aus $A1 \wedge A2$ folgt: $||$ ist eine Äquivalenzrelation.

Haben $A1 \wedge A2$ auch andere Modelle? Ja. Um ausgeartete Fälle auszuschließen, fordern wir zunächst noch

A3 Es gibt wenigstens drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen.
A4 Auf jeder Geraden liegen wenigstens zwei Punkte.

Wie sieht dann das kleinste Modell aus? Es besteht aus vier Punkten $1, 2, 3, 4$ und den sechs Geraden $12, 23, 34, 14, 13, 24$. Man mache sich klar, daß damit wirklich $A1 \wedge A2 \wedge A3 \wedge A4$ erfüllt sind.

Jedes Modell für $A1 \wedge A2 \wedge A3 \wedge A4 \wedge A5$ heißt *affine Inzidenz–Ebene*. Hierbei ist $A5$ ein weiteres Axiom (der affine "Satz" von Desargues).

3 Euklidische Geometrie

Mit weiteren Festlegungen über Relationen der *Anordnung* (Punkt p liegt auf einer Geraden *zwischen* den Punkten q und r) und Relationen der *Größe* (die Punkte p, q *sind voneinender genausoweit entfernt wie* die Punkte r, s) erhalten wir ein Axiomensystem für die Euklidische Geometrie.

Übung: Wie müßten solche Axiome aussehen? Es sollten die üblichen elementaren Kongruenzsätze folgen. Vergleiche mit Axiomen aus der Literatur (siehe Hinweise am Ende).

4 Projektive Geometrie

Andere Geometrien erhalten wir durch Variieren der Axiome.

Wir betrachten das schon erwähnte

$$P1 \qquad \forall p \ \mathsf{punkt}(p) \to \forall q \ \mathsf{punkt}(q) \to (p \neq q \to \exists! g \ \mathsf{gerade}(g) \land p \,\mathbf{I}\, g \land q \,\mathbf{I}\, g)$$

Rein formal können wir eine dazu *duale* Aussage bilden, indem wir überall Punkte und Geraden vertauschen:

$$P2 \qquad \forall g \ \mathsf{gerade}(g) \to \forall h \ \mathsf{gerade}(h) \to (g \neq h \to \exists! p \ \mathsf{punkt}(p) \land p \,\mathbf{I}\, g \land p \,\mathbf{I}\, h)$$

Das heißt, daß sich zwei verschiedene Geraden stets in genau einem Punkt schneiden. Das widerspricht dem Parallelenaxiom, also ist die Euklidische Ebene kein Modell für $P1 \land P2$.

Trotzdem sehen $P1$ und $P2$ zusammen so schön symmetrisch aus, und wir wollen das nicht kampflos aufgeben.

Gibt es überhaupt Modelle für $P1 \land P2$? Aber ja, haufenweise! Wir können uns aus dem euklidischen $\mathbb{R}^2$ ein Modell basteln. Wir müssen dafür sorgen, daß sich auch Parallelen schneiden. Wir erfinden zu jeder Richtung einen "unendlichen Punkt". Nur je einen, d. h. der unendliche Punkte im Südwesten *ist* der unendliche Punkte im Nordosten! Das erfüllt das Axiom $P2$. Allerdings geht $P1$ kaputt, denn auch je zwei unendlich ferne Punkte müssen auf einer Geraden liegen. Das reparieren wir leicht: wir legen eine unendlich ferne Gerade (den "Horizont") durch alle unendlich fernen Punkte.

Die Benutzung des Unendlichen klingt etwas mystisch, wir besorgen uns deswegen noch ein beschränktes Modell, indem wir die eben hergestellte Konstruktion auf eine Halbkugel projizieren: Wir setzen auf die Ebene im Nullpunkt eine Kugel (vom Radius 1, das ist aber egal), und projizieren jeden Punkt P der Ebene auf den Schnittpunkt der Kugeloberfläche mit dem Strahl vom Kugelmittelpunkt zu P.

Die Geraden der Ebene sind dann halbe Großkreise auf der (Südhalb–)Kugel, und die unendlich fernen Punkte landen auf dem Äquator. Beachte: nur auf einer Hemisphäre (z. B. der östlichen), denn je zwei diametrale Richtungen haben nur einen unendlichen Punkt.

Topologisch ist die projektive Ebene ein Möbiusband: Wir schieben etwa ein mathematisch positiv orientiertes Dreieck ABC nach Norden ins Unendliche, sagen wir A genau Richtung Norden, B etwa 5^o Nord nach West, und C etwa 5^o Nord nach Ost. Die Spitze A taucht als erstes aus Süden wieder auf, dann erscheinen B auf Süd nach Ost, und C auf Süd nach West. Wenn das Dreieck schließlich wieder bei uns ankommt, ist sein orientierter Flächeninhalt negativ.

5 Projektiver Abschluß

Das eben auf $\mathbb{R}^2$ angewandte Verfahren macht tatsächlich aus jeder affinen eine projektive Geometrie. Wie können wir es formalisieren? Wir betrachten einen "unendlich fernen Punkt in einer bestimmten Richtung" einfach als Äquivalenzklasse von zueinander parallelen Geraden (die eben in diese Richtung zeigen). Alle diese Punkte nehmen wir hinzu, und eine neue (die "unendlich ferne") Gerade.

Umgekehrt erhalten wir aus jeder projektiven Ebene durch Löschen einer Geraden und aller mit ihr inzidenten Punkte eine affine Ebene.

Übung: formal aufschreiben und beweisen.

Es ist dabei egal, welche Gerade wir löschen. Es muß also nicht "die" unendliche sein, die gibt es gar nicht, denn in einer projektiven Ebene sind alle Geraden sind gleichwertig. (Anschaulich: wir können eine Zentralperspektive immer so wählen, daß jede gewünschte Gerade zur Horizontlinie wird.)

6 Endliche Projektive Ebenen

Wenden wir den projektiven Abschluß auf die oben erwähnte kleinste affine Ebene an: es gibt drei Richtungen, denn die Äquivalenzklassen der Richtungen sind $\{\{12, 34\}, \{13, 24\}, \{14, 23\}\}$. Also brauchen wir drei neue ("unendlich ferne" Punkte) $5, 6, 7$. Wir verlängern die (bisher endlichen) Geraden zu $\{125, 345, 136, 246, 147, 237,$ und fügen die unendliche Gerade 567 hinzu. Das gibt die kleinste projektive Ebene.

Eine projektive Inzidenz–Ebene die Axiome $P1 \wedge P2 \wedge P3 \wedge P4 \wedge P5$, wobei wieder $P3$ und $P4$ dazu dienen, Grenzfälle auszuschließen:

> $P3$ Es gibt wenigstens vier verschiedene Punkte, von denen keine drei auf der gleichen Geraden liegen.
>
> $P4$ Auf jeder Geraden liegen wenigstens drei verschiedene Punkte.

und $P5$ der (projektive) "Satz" von Desargues ist.

Übung: schreibe $P3$ und $P4$ als prädikatenlogische Formel.

Übung: Zeige, daß in jedem Modell von $P1 \wedge P2 \wedge P3$ auch das Dual von $P3$ gilt:

> $P3'$ Es gibt wenigstens vier Geraden, von denen keine drei durch einen gemeinsamen Punkte verlaufen.

Übung: zeige, daß auf allen Geraden gleich viele Punkte liegen (d. h. für beliebige g, h gibt es eine Bijektion zwischen den Mengen $\{p \mid p \, \mathbf{I} \, G\}$ und $\{q \mid q \, \mathbf{I} \, h\}$), und daß es genausoviele Geraden wie Punkte gibt (d. h. eine Bijektion zwischen Geraden und Punkten existiert.)

7 Hyperbolische Geometrie

Das Parallelenaxiom (das 5. Euklidische Axiom) scheint unserer Vorstellung zu entsprechen. Lange Zeit war umstritten, ob es bereits aus den anderen Axiomen folgt, oder von diesen unabhängig ist. Wir haben hier bereits einen Beweis für die Unabhängigkeit gegeben: in projektiven Ebenen gilt das Parallelenaxiom nicht, denn es gibt gar keine Parallelen (zwei verschiedene Geraden schneiden sich immer.)

Wir sehen das auch bei einer anderen Art von Geometrien, denn eine andere Verneinung des Parallelenaxioms ist:

> H2 Für alle Geraden g und Punkte p nicht auf g gilt: es gibt mehr als eine Gerade h durch p, die g nicht schneidet.

Modelle dafür heißten *hyperbolische* Geometrien. Ich gebe zwei Beispiele an (die zwar recht verschieden aussehen, sich aber tatsächlich gar nicht so sehr unterscheiden)

Wir wählen irgendeinen Kreis K und betrachten die Menge M seiner inneren Punkte. Ein Modell für eine Geometrie erhalten wir so:

- die Modell–Punkte sind die Elemente von M
- die Modell–Geraden sind die Sehnen von K (ohne Endpunkte)
- die Modell–Inzidenz ist die übliche

Es ist klar, daß das ein Modell für $H1 = A1$ und $H2$ bildet.

Ein weiteres Modell entsteht so:

- Modell–Punkte sind alle Punkte der oberen Halbebene, d. h. "oberhalb" der x–Achse, ohne dieselbe
- Modell–Geraden sind alle Halbkreise, die in der oberen Halbebene liegen und ihren Mittelpunkt auf der x–Achse haben.

Übung: wie legt man durch zwei Modellpunkte eine Modellgerade?

Das Interessante an diesem Modell (und auch dem Halbkugelmodell der projektiven Ebene) ist, daß man tatsächlich auch Anordnungs– und Größenaxiome hat, also zum Beispiel auch Strecken und Winkel messen kann. Übung: betrachte die Innenwinkelsummen von Dreiecken in beiden Modellen.

8 Geschichte und Literatur

Die Geometrie ist eine der ältesten Wissenschaften überhaupt. (Denken Sie an Anwendungen bei Landvermessung und (astronomischer) Zeitberechnung.)

Axiomatische Fragen stammen bereits von Euklid (300 v. Chr.) Sein Buch "Elemente" war bis ins vorige Jahrhundert die wesentliche Grundlage für geometrische Sätze, Beweise und Methoden.

Die nichteuklidischen Geometrien gibt es seit Bolyai, Gauss, Lobachevski (ca. 1830).

Wichtige Geometer vor/zur Jahrhundertwende sind Hilbert ("Grundlagen der Geometrie", 1899), Klein (Gründer des Mathematischen Seminars in Leipzig 1880; Erlanger Programm: Theorie der (Bewegungs–)Gruppen als Grundlage der Geometrie, 1872), Minkowski (Geometrie der Zahlen, Anwendung der nichteuklidischen Raumzeit bei Einsteins Relativitätstheorie).

Biographien alle erwähnten Mathematiker sind hier: `http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk:80/~history/Mathematicians/Euclid.html`

Eine wichtige Web–Seiten zur Geometrie ist `http://www.geom.umn.edu/`.

Bücher zu Grundlagen der Geometrie finden Sie in der Mathematik–Bibliothek, darunter auch viele historisch wertvolle bereits im Handapparat des Lesesaals (4. OG).

Ein Artikel über axiomatische (affine) Geometrie steht in der Wurzel 5/00 `http://www.wurzel-ev.de`. Ich habe einige Werbe–Exemplare dieses Heftes, die Sie in meinem Büro abholen können.

Das geometrische, d. h. bildhafte Denken hilft beim Problemlösen in verschiedensten Bereichen — nicht nur der Mathematik oder Informatik, dort aber besonders.

Ich empfehle Ihnen diesbezüglich für das Wintersemester 00/01 die Vorlesung "Geometrie mit dem Computer" von Herr Dr. Gräbe `http://www.informatik.uni-leipzig.de/~graebe/vorlesungen/geometrie.html`, sowie Lehrveranstaltungen der Arbeitsgruppe Computergraphik (Herr Prof. Saupe).