
8. Übung zu Theoretische Informatik: Berechenbarkeit und Komplexität

Wintersemester 2025/26

zu lösen bis 9. Januar 2026

Aufgabe 8.1:

Zeigen Sie, dass das spezielle Halteproblem H_S rekursiv aufzählbar ist.

Aufgabe 8.2:

Zeigen Sie, dass die Menge, REC und RE (auf Wörtern aus X^*) unter den Sprachoperationen $\circ$, $*$ und R abgeschlossen sind.

Aufgabe 8.3:

Zeigen Sie, dass gilt

1. $\{x^2 \mid x \in \mathbb{N}\} \leq_m 2\mathbb{N}$
2. $\text{REC}(\text{NFA}) \leq_m \text{REC}(\text{DFA})$
3. $\mathbb{N} \leq_m H_0$
4. $\{G = (V, E) \mid G \text{ enthält einen Eulerkreis}\} \leq_m 2\mathbb{N}$
5. $H \leq_m H_S$ (Gegenrichtung zur Vorlesung)

Aufgabe 8.4:

Zeigen Sie, dass die Reduktion $\leq_m$ reflexiv und transitiv ist.
Ist sie auch symmetrisch, antisymmetrisch, linear?

Aufgabe 8.5:

Zeigen Sie, dass die beiden folgenden Formeln äquivalent sind:

$$\forall P, Q \subseteq \mathbb{N} : ((P \leq_m Q \wedge Q \in \text{REC}) \rightarrow P \in \text{REC})$$

$$\forall P, Q \subseteq \mathbb{N} : ((P \leq_m Q \wedge P \notin \text{REC}) \rightarrow Q \notin \text{REC})$$

Aufgabe 8.6:

Zeigen Sie $\overline{T} \notin \text{RE}$ durch Reduktion auf eine geeignete Menge.

Aufgabe 8.7:

Stellen Sie fest, welche der folgenden Aussagen gelten und begründen Sie:

- | | |
|---------------------------------------|---|
| 1. $U \subseteq \overline{E}$ | 1. $RE \cap \overline{RE} = \emptyset$ |
| 2. $U \subseteq \text{co}E$ | 2. $RE \cap \text{co}RE = \emptyset$ |
| 3. $\text{co}E \subseteq U$ | 3. $RE \subseteq \text{co}RE$ |
| 4. $U \subseteq \text{co}U$ | 4. $\text{co}RE \subseteq RE$ |
| 5. $\text{co}U \subseteq U$ | 5. $RE \cap \text{co}RE \subseteq RE$ |
| 6. $E \subseteq \overline{U}$ | 6. $RE \cap \text{co}RE \subseteq REC$ |
| 7. $E \subseteq \text{co}U$ | 7. $REC \subseteq \text{co}REC$ |
| 8. $\overline{E} \subseteq U$ | 8. $\text{co}REC \subseteq REC$ |
| 9. $E \cap \overline{E} = \emptyset$ | 9. $REC \cap \text{co}REC \subseteq RE$ |
| 10. $U \cap \overline{U} = \emptyset$ | 10. $REC \cap \text{co}REC \subseteq REC$ |
| | 11. $REC \cap \text{co}RE = \emptyset$ |

Aufgabe 8.8:

Zeigen Sie:

1. $\forall \varphi \in \text{FOL}(\Sigma, \mathbb{X}) : \varphi$ allgemeingültig gdw. $\neg\varphi$ unerfüllbar
2. $\forall \varphi, \psi \in \text{FOL}(\Sigma, \mathbb{X}) : \varphi \models \psi$ gdw. $\varphi \wedge \neg\psi$ unerfüllbar