
7. Übung zu Theoretische Informatik: Berechenbarkeit und Komplexität

Wintersemester 2025/26

zu lösen bis 19. Dezember 2025

Aufgabe 7.1:Zum Beweis $\text{LOOP} \subseteq \text{PRIM}$:

1. im IA: Geben Sie einen Funktionsterm in PRIM an, der dieselbe Semantik wie das Loop-Programm $\text{Dec } i$ hat.
2. im IS: Geben Sie, ausgehend vom Funktionsterm f_q zum Loop-Programm q , einen Funktionsterm in PRIM an, der dieselbe Semantik wie das Loop-Programm $\text{Loop}(i, q)$ hat.

Aufgabe 7.2:Zum Beweis $\text{WHILE} \subseteq \text{PART}$:

1. Geben Sie, ausgehend vom Funktionsterm f_q zum Loop-Programm q , einen Funktionsterm in PART an, der dieselbe Semantik wie das While-Programm $\text{IfZ } iq$ hat.
2. zur Übersetzung des Programmes $p = \text{While}(i, q)$ zu $f_p = f_{\text{While}(i, q)} = f_q^{h(x)}$:
Zeigen Sie $h(x) \in \text{PRIM}$ und $f_q^{h(x)} \in \text{PRIM}$.

Aufgabe 7.3:

Zeigen Sie, dass jede rekursiv aufzählbare Menge abzählbar ist.

Aufgabe 7.4:

Geben Sie Konstruktionen an, die

1. jede TM M , die eine Sprache $L \subseteq X^*$ semi-entscheidet, in eine TM M' transformiert, die L akzeptiert.
2. jede TM M , die eine Sprache $L \subseteq X^*$ akzeptiert, in eine TM M' transformiert, die L semi-entscheidet.
3. jede TM M , die eine Sprache $L \subseteq X^*$ entscheidet, in eine TM M' transformiert, die L akzeptiert.
4. jede TM M , die eine Sprache $L \subseteq X^*$ entscheidet, in eine TM M' transformiert, die die Sprache $\bar{L}$ akzeptiert.
5. jede TM M , die eine Sprache $L \subseteq X^*$ aufzählt, in eine TM M' transformiert, die L akzeptiert.

Aufgabe 7.5:Zeigen Sie, dass für jede entscheidbare Sprache $L \subseteq X^*$ auch die Sprache $L' \subseteq L$ mit $L' = \{w \in L \mid \forall v \in L : (v \sqsubseteq w \rightarrow v = w)\}$ entscheidbar ist.

Aufgabe 7.6:

Zeigen Sie, dass die folgenden Mengen entscheidbar sind, indem Sie je ein Entscheidungsverfahren angeben:

1. Menge aller durch 3 teilbaren natürlichen Zahlen,
2. Menge aller Tripel $(x, y, \text{ggT}(x, y))$ mit $x, y \in \mathbb{N}$,
3. Menge aller Paare (u, v) mit $u, v \in \{a, b\}^*$ mit $u \sqsubseteq v$,
4. Menge aller regulären Ausdrücke über dem endlichen Alphabet X ,
5. Menge aller aussagenlogischen Formeln in konjunktiver Normalform,
6. Menge aller erfüllbaren aussagenlogischen Formeln mit Aussagenvariablen p, q, r ,
7. jede kontextfreie Sprache,
8. Menge aller Goto-Programme, Menge aller Loop-Programme,
9. Menge aller partiell rekursiven Funktionsterme.

Aufgabe 7.7:

Wie lässt sich zu jeder entscheidbaren

1. Sprache $L \subseteq \{a, b\}^*$ eine TM M_L konstruieren, welche alle Wörter in L in quasi-lexikographischer Reihenfolge hintereinander auf das Band schreibt?
2. Menge $L \subseteq \mathbb{N}$ eine Funktion $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ konstruieren, die auf Eingabe $n \in \mathbb{N}$ den n -t-kleinsten Wert in L zurückgibt?