
5. Übung zu Theoretische Informatik: Berechenbarkeit und Komplexität

Wintersemester 2025/26

zu lösen bis 28. November 2025

Aufgabe 5.1:

Zeigen Sie, dass zu jedem Loop-Programm p ein äquivalentes Loop-Programm q existiert, in dem kein `lfZ` vorkommt.

Aufgabe 5.2:

Zeigen Sie, dass die Menge `LOOP` unter (mehrstelliger) Substitution abgeschlossen ist, d.h. für alle partiellen Funktionen $f : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$ und $g_1, \dots, g_k : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ gilt:

falls $f \in \text{LOOP}$ und $\forall i \in \{1, \dots, k\} : g_i : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \in \text{LOOP}$, dann $(x \mapsto f(g_1(x), \dots, g_k(x))) \in \text{LOOP}$

Aufgabe 5.3:

In verschiedenen Codierungen von Paaren, Listen usw. wurden Primzahlpotenzen verwendet. Zeigen Sie, dass die Funktion $p : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ mit $\forall i \in \mathbb{N} : p(i) = i\text{-te Primzahl}$

1. While-berechenbar ist,
2. Loop-berechenbar ist.

Aufgabe 5.4:

Wie lassen sich Goto-, Loop-, While-Programme als Eingabe für universelle Programme codieren?

Aufgabe 5.5:

1. Bestimmen Sie schrittweise die Werte $A(2, 4)$, $A(3, 3)$, $A(4, 2)$ der Ackermann-Funktion und geben Sie jeweils an, für welche kleineren Argumente $x, y \in \mathbb{N}$ die Werte $A(x, y)$ dabei in welcher Reihenfolge berechnet werden müssen.
2. Zeigen Sie, dass für die Ackermann-Funktion $A : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ gilt

$$\forall x, y \in \mathbb{N} : A(x + 1, y) \geq A(x, y + 1)$$

Hinweis: Induktion nach y

Aufgabe 5.6:

Zeigen Sie, dass für die Ackermann-Funktion für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$A(0, n) = n + 1$$

$$A(1, n) = 2 + (n + 3) - 3$$

$$A(2, n) = 2(n + 3) - 3$$

$$A(3, n) = 2^{(n+3)} - 3$$

Aufgabe 5.7:

Die Sudan-Funktion $S : \mathbb{N}^3 \rightarrow \mathbb{N}$ ist definiert durch $\forall x, y, z \in \mathbb{N}$:

$$S(x, y, 0) = x + y$$

$$S(x, 0, n + 1) = x$$

$$S(x, y + 1, n + 1) = S(S(x, y, n + 1), S(x, y, n + 1) + y + 1, n)$$

Zeigen Sie $\forall x, y \in \mathbb{N} : S(x, y, 1) = 2^y(x + 2) - y - 2$

Aufgabe 5.8:

Im indirekten Beweis für $A \notin \text{LOOP}$ wurde die Funktion

$d : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ mit $\forall n \in \mathbb{N} : d(n) = A(n, n)$ verwendet.

Zeigen Sie, dass aus der Annahme $A \in \text{LOOP}$ folgt, dass auch $d \in \text{LOOP}$ gilt.

Aufgabe 5.9:

Zeigen Sie den Induktionsschritt im Beweis des Satzes ($\forall p \in \text{Loop} \exists k \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} : g_p(n) < A(k, n)$) für $p = \text{Loop}(i, q)$ (Hinweis: $k = k_q + 1$)

Aufgabe 5.10:

Warum lässt sich der Diagonalisierungs-Beweis für $\text{WHILE} \cap \text{TOTAL} \not\subseteq \text{LOOP}$ nicht auch mit WHILE statt LOOP führen?