

2. Übung zu Theoretische Informatik: Berechenbarkeit und Komplexität

Wintersemester 2025/26

zu lösen bis 7. November 2025

Aufgabe 2.1:

In der Vorlesung wurde eine Darstellung für TM als Binärwörter vorgestellt.

- Bestimmen Sie diese Darstellung für die TM
 $M = (\{a\}, \{q, p\}, \{a, \square\}, \{(a, q, a, q, R), (\square, q, \square, p, L), (a, p, \square, p, L)\}, q, \square)$
- Geben Sie eine DTM M_C an, die genau dann hält, wenn das Eingabewort die korrekte Darstellung einer TM ist (Wie auf den Folien zur Vorlesung genügt auch hier die Darstellung der Übergangsrelation).
- Zeigen Sie, dass die DTM M_C aus Teilaufgabe b. bei Eingabe der Darstellung von M aus Teilaufgabe a. hält.

Aufgabe 2.2:

Leiten Sie aus der Spezifikation für Paar-Codierungen her, dass in jeder Paar-Codierung die Funktion $C' : \mathbb{N}^2 \rightarrow T^{-1}(1)$ mit $\forall (x, y) \in \mathbb{N} : C'(x, y) = C(x, y)$ bijektiv ist.

Aufgabe 2.3:

- Zeigen Sie, dass für $f(n) = \max\{x \in \mathbb{N} \mid 2^x \leq n\}$ die Funktionen

$$C(x, y) = 2^{x+y} + x$$

$$P_1(n) = n - 2^{f(n)}$$

$$P_2(n) = f(n) - P_1(n)$$

$$T(n) = (n \in \{2^i + j \mid i \in \mathbb{N} \wedge j \leq i\})$$

eine Paar-Codierung bilden,

- geben Sie die Werte $C(2, 3), C(3, 2), T(10), T(12), P_1(10), P_2(10)$ an.

Aufgabe 2.4:

Geben Sie für jede der Paar-Codierungen aus der Vorlesung an:

- die Funktionen P_1, P_2, T ,
- den Nachweis, dass diese Funktionen die Spezifikation für Paar-Codierungen erfüllen,
- die Werte $C(2, 3), C(3, 2), T(10), T(12), P_1(12), P_2(12)$.

Aufgabe 2.5:

Geben Sie für jede der Listen-Codierungen L aus der Vorlesung an:

- a. die Funktionen D_i
- b. Algorithmen zur Berechnung von L und D_i
- c. den Nachweis, dass $\forall x = [x_0, \dots, x_n] \in \mathbb{N}^* : D_i(L(x)) = x_i$
Was ist eine sinnvolle Definition für $D_i(x)$, falls $i > |x|$?
- d. die Werte $L([]), L([5]), L([2, 3, 0])$

Aufgabe 2.6:

Geben Sie für die Baum-Codierung $B : \text{Term}(\Sigma) \rightarrow \mathbb{N}$ und die Signatur Σ aus der Vorlesung an:

- a. die Testfunktion $T : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$
- b. eine Decodierung $D : \mathbb{N} \rightarrow \text{Term}(\Sigma)$
- c. Algorithmen zur Berechnung von T und D
- d. den Nachweis, dass $\forall t \in T^{-1}(1) : D(B(t)) = t$
- e. die Werte $B(a), B(g(a)), B(f(g(a), a))$