

1. Übung zu Theoretische Informatik: Berechenbarkeit und Komplexität

Wintersemester 2025/26

zu lösen bis 27. Oktober 2025

Aufgabe 1.1:

Konstruieren Sie eine Turingmaschine, welche

- a. zu jeder in Binärdarstellung gegebenen natürlichen Zahl n die Unärdarstellung der Zahl n
- b. zu jeder in Unärdarstellung gegebenen natürlichen Zahl n die Binärdarstellung der Zahl n

berechnet. Kommentieren Sie die Funktionsweise Ihrer Turingmaschinen und geben Sie je zwei aussagekräftige Berechnungen an.

Aufgabe 1.2:

Konstruieren Sie je eine Turingmaschine, welche

- a. Genau bei Eingabe jedes Wortes aus der Sprache $L = \{1^n \bullet 1^{3n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ hält.
- b. die Funktion $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ mit $\forall x \in \mathbb{N} : f(x) = 3x$ berechnet,
- c. die folgende Funktion $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ berechnet:

$$\forall x \in \mathbb{N} : f(x) = \begin{cases} x/3 & \text{falls } x \equiv 0 \pmod{3} \\ \text{nicht definiert} & \text{sonst} \end{cases}$$

Erkennen und nutzen Sie dabei die Zusammenhänge zwischen den Teilaufgaben.

Aufgabe 1.3:

Geben Sie eine TM mit $k \geq 2$ Bändern an, welche die Inhalte der ersten beiden Bänder vertauscht. Wenn also zu Beginn das Wort $u \in \{0,1\}^*$ auf Band 1 und das Wort $v \in \{0,1\}^*$ auf Band 2 steht, soll nach Halt v auf Band 1 und u auf Band 2 stehen.

Aufgabe 1.4:

Geben Sie eine 2-Band-TM an, die genau dann hält, wenn zu Beginn der Berechnung das Wort $v \in \{0,1\}^*$ auf Band 1 ein Infix des Wortes $w \in \{0,1\}^*$ auf Band 2 ist.

Aufgabe 1.5:

Geben Sie eine 3-Band-TM an, welche zu einem gegebenen Wort $w \in \{a,b\}^*$ die Anzahl der in w vorkommenden a in Unärdarstellung auf Band 2 und die Anzahl der in w vorkommenden b in Unärdarstellung auf Band 3 schreibt.

Aufgabe 1.6:

Zeigen Sie, dass die zweistellige Funktion $f : \{a,b\}^* \times \{b,c\}^* \rightarrow \{a,b,c\}^*$ mit $f(u,v) = w$ mit

$$\begin{aligned} \forall i \in \{1, \dots, \min(|u|, |v|)\} : & \quad w_{2i-1} = u_i \wedge w_{2i} = v_i \\ \text{falls } |u| > |v| : \forall i \in \{|v|+1, \dots, |u|\} : & \quad w_{2|v|+i} = u_i \\ \text{falls } |v| > |u| : \forall i \in \{|u|+1, \dots, |v|\} : & \quad w_{2|u|+i} = v_i \end{aligned}$$

Turing-berechenbar ist.

Konstruieren Sie dazu eine Zwei- oder Mehrband-Turingmaschine M , welche genau die Sprache $L = \{a,b\}^* \times \{b,c\}^*$ durch Halt akzeptiert und für jede akzeptierte Eingabe die Funktion $f_M(u,v) = f(u,v)$ berechnet.

In der Startkonfiguration stehen die Eingaben u auf Band 1 und v auf Band 2, alle anderen (evtl. vorhandenen) Bänder sind leer.

Geben Sie an, auf welchem Band bei Halt die Ausgabe abzulesen ist.

Kommentieren Sie die Funktionsweise Ihrer Turingmaschine und geben Sie wenigstens drei aussagekräftige Berechnungen an.

Aufgabe 1.7:

Zeigen Sie, dass die zweistellige Funktion $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ mit $f(x, y) = |x - y|$ Turing-berechenbar ist.

Konstruieren Sie dazu eine Zwei- oder Mehrband-Turingmaschine M , welche genau die Sprache $L = (\{1\}^*)^2$ durch Halt akzeptiert und für jede akzeptierte Eingabe die Funktion $f_M(x, y) = f(x, y)$ (Eingaben und Ergebnis in Unärdarstellung) berechnet.

In der Startkonfiguration stehen die Eingaben x auf Band 1 und y auf Band 2, alle anderen (evtl. vorhandenen) Bänder sind leer. Ausgabe bei Halt ist der Inhalt des Bandes 1.

Kommentieren Sie die Funktionsweise Ihrer Turingmaschine und geben Sie wenigstens drei aussagekräftige Berechnungen an.

Aufgabe 1.8:

Ein *beidseitig unendliches Band* ist ein Band, dessen Kopf Positionen $\in \mathbb{Z}$ enthält.

Ein *einseitig unendliches Band* ist ein Band, dessen Kopf nur Positionen $\in \mathbb{N}$ enthält.

- a. Zeigen Sie, wie man einen Stack (nur Operationen empty, push, pop, top) durch ein einseitig unendliches Band mit den für TM üblichen Übergängen simulieren kann.
Geben Sie dazu zu jeder Stack-Operation die entsprechenden Folgen von Konfigurationsübergängen der dazu konstruierten TM an.
- b. Zeigen Sie, wie man ein beidseitig unendliches Band durch zwei Stacks simulieren kann.
Geben Sie dazu zu jedem möglichen Konfigurationsübergang die entsprechende Folge von Stack-Operationen an.
- c. Wie lassen sich die Konstruktionen aus den ersten beiden Teilaufgaben zu einer Simulation einer Einband-TM mit beidseitig unendlichem Band durch eine Zweiband-TM mit zwei einseitig unendlichen Bändern kombinieren.