

0. Übung zu Theoretische Informatik: Berechenbarkeit und Komplexität

Wintersemester 2025/26

zu lösen bis 17. Oktober 2025

Aufgabe 0.1:

Welche der folgenden Formeln sind erfüllbar, welche allgemeingültig? Begründen Sie.

- $((a \rightarrow b) \rightarrow (b \wedge c)) \vee ((a \wedge b) \rightarrow c)$
- $(p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow p) \rightarrow (p \vee q))$
- $\forall x \exists y P(x, y) \rightarrow \exists x \forall y P(x, y)$
- $\forall x \exists y P(x, y) \rightarrow \forall y \exists x P(x, y)$

Aufgabe 0.2:

Zeigen Sie

- $\forall u, v \in A^* : (u^R \circ v^R) = (v \circ u)^R$
- $\forall L \subseteq A^* : L \circ \{\varepsilon\} = L$
- $\forall L \subseteq A^* : L \circ \emptyset = \emptyset$
- $\forall L, L' \subseteq A^* : L \circ (L' \circ L)^* = (L \circ L')^* \circ L$

Aufgabe 0.3:

- Zeigen Sie $ab(bab)^* \equiv (abb)^*ab$.
- Zeigen Sie $\forall E, F \in \text{RegExp}(A) : E(FE)^* \equiv (EF)^*E$.
- Finden Sie einen zu $\overline{(a+b)^*ab(a+b)^*}$ äquivalenten (einfachen) regulären Ausdruck. Weisen Sie die Äquivalenz nach.

Aufgabe 0.4:

Welche der folgenden Mengen sind endlich, abzählbar, überabzählbar? Begründen Sie.

- | | | |
|-------------------------|--|-------------------------------|
| a. $3\mathbb{N}$ | g. $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ | m. $\binom{\mathbb{N}}{2}$ |
| b. $\mathbb{N}^3$ | h. $\mathbb{N} \setminus 3\mathbb{N}$ | n. $L((\varepsilon(ab+b))^*)$ |
| c. $2^{\mathbb{N}}$ | i. $\mathbb{N} \cap \mathbb{N}^3$ | o. $L((\emptyset(ab+b))^*)$ |
| d. $2^{\emptyset}$ | j. $\{a, b\}^{\mathbb{N}}$ | p. $L((ab+b)^3)$ |
| e. $2^{\{a\}}$ | k. $\{a, b\}^{\mathbb{N}} \cap \{b, c\}^{2\mathbb{N}}$ | q. $L(((ab+b)^3)^*)$ |
| f. $\mathbb{N}^{\{a\}}$ | l. $\binom{\{a,b,c\}}{2}$ | r. $L((a(ab+b)^*)^*)$ |

Aufgabe 0.5:

- Geben Sie für den NFA $A = (\{a, b\}, \{p, q\}, \delta, \{p\}, \{q\})$ mit $\delta(a) = \{(p, p), (p, q), (q, p)\}$, $\delta(b) = \{(p, p), (q, q)\}$ die Sprache $L(A)$ an.
- Geben Sie einen NFA B mit $L(B) = \overline{L(A)}$ an.
- Geben Sie einen NFA C mit $L(C) = \overline{(a+b)^*ab(a+b)^*}$ an.
- Zeige Sie, dass die Sprache $\{a^n b^m \mid n < m\}$ nicht NFA-akzeptierbar ist.
- Geben Sie ein Verfahren zum Nachweis von $L(A) = L(B)$ für gegebene NFA A, B an.

Aufgabe 0.6:

- a. Gegeben ist die Grammatik $G_1 = (\{S, T\}, \{a, b\}, \{S \rightarrow T|aSa|bSa, T \rightarrow b|\varepsilon\}, S)$
- (a) Geben Sie zu jedem der Wörter $\varepsilon, b, ab, ba, aba$ eine Ableitung in G_1 an, sofern diese existiert.
- (b) Geben Sie die Sprache $L(G_1)$ an.
- b. Geben Sie für jede der Sprachen

$$L_1 = \{a^m b^n a^{m+n} \mid m, n \in \mathbb{N}\}$$

$$L_2 = L(b(a^*b)^*)$$

- (a) eine Grammatik G_i mit $L(G_i) = L_i$ an,
- (b) für vier sinnvoll gewählte Wörter aus L_i je eine Ableitung in G_i an.
- (c) für zwei sinnvoll gewählte Wörter aus $\overline{L_i}$ je eine Begründung, warum keine Ableitung in G_i dafür existiert.

Aufgabe 0.7:

Geben Sie zu jeder der folgenden Sprachen L_i an:

- a. den Chomsky-Typ von L_i ,
- b. eine Grammatik G_i dieses Typs mit $L_i = L(G_i)$,
- c. eine zum Chomsky-Typ von L_i passende abstrakte Maschine A_i mit $L_i = L(A_i)$

und begründen Sie Ihre Antworten.

$$L_1 = \{w \in \{a, b, c\}^* \mid |w| \in 2\mathbb{N} \wedge w = w^R\}$$

$$L_2 = \{w \in \{a, b, c\}^* \mid |w| \in 2\mathbb{N} \wedge w = w^R\} \cup \{a, b, c\}^*$$

$$L_3 = \{w \in \{a, b, c\}^* \mid |w| \in 2\mathbb{N} \wedge w = w^R\} \cap \{b\}^*$$

$$L_4 = \{waw \mid w \in \{a, b\}^*\}$$

$$L_5 = \{www \mid w \in \{a, b\}^*\}$$

$$L_6 = \{a^i \mid i \in \mathbb{N}\}$$

$$L_7 = \{a^{3i} \mid i \in \mathbb{N}\}$$

$$L_8 = \{a^{(i^3)} \mid i \in \mathbb{N}\}$$

$$L_9 = \{a^{(3^i)} \mid i \in \mathbb{N}\}$$

$$L_{10} = \{waw^R \mid w \in \{a, b\}^*\}$$