

8. Übung im Modul „Modellierung“

Wintersemester 2025/26

zu lösen bis 3. Dezember 2025

Aufgabe 8.1Die folgenden Tabellen enthalten die Relationen L und A . L (Lieblingsgetränke)

Person	Getränk
Tina	Cola
Tina	Wasser
Paul	Bier
Anna	Rotwein
Anna	Wasser
Klaus	Wasser
Klaus	Weißwein
Anna	Bier
Moni	Eierlikör
Moni	Cola

 A (Getränke-Angebot)

Restaurant	Getränk
Seeblick	Wasser
Seeblick	Eierlikör
Talschenke	Bier
Talschenke	Wasser
Berghof	Rotwein
Berghof	Weißwein

Außerdem ist bekannt:

- Paul ist Annas Vater.
- Anna und Klaus sind Tinas Eltern.
- Moni ist die Mutter von Klaus.

Diese Aussagen definieren die Relation E (ist Elternteil von) und die Eigenschaften W (weiblich) und M (männlich).

- Geben Sie für die Relationen L , A , E , W , M jeweils Stelligkeit und Typ der Relation an.
- Geben Sie jeweils extensionale Darstellungen und umgangssprachliche Beschreibungen für die folgenden Mengen und Relationen an:
 - $L|_{\{Anna, Klaus\}}$
 - $L^{-1}|_{\{Bier, Wasser\}}$
 - $A^{-1}|_{\{Bier, Wasser\}}$
 - $\pi_1(A)$
 - $\pi_2(L|_{\{Anna, Klaus\}})$
 - E^{-1}
 - $L \circ A^{-1}$
- Stellen Sie die Relation istUrenkelVon durch die Relation E dar.
- Stellen Sie die Relation sindGeschwister mit Hilfe der Relation E dar. (Achtung: Niemand ist Geschwister von sich selbst. Sie brauchen also eine weitere bekannte Relation.)

Aufgabe 8.2

Zeigen Sie, dass für alle binären Relationen

- $R \subseteq A \times B$ und $S \subseteq A \times B$ gilt $(R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1}$
- $R \subseteq A \times B$ und $S \subseteq B \times C$ gilt $(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$

Aufgabe 8.3

- Geben Sie eine Relation $S \subseteq \{a, b, c, d\}^2$ an, die weder symmetrisch noch asymmetrisch noch antisymmetrisch ist.
- Geben Sie zwei symmetrische Relationen $R \subseteq M \times M$ und $Q \subseteq M \times M$ auf der Menge $M = \{a, b, c\}$ an, deren Verkettung $R \circ Q$ nicht symmetrisch ist.

Aufgabe 8.4

Lösen Sie die folgenden Aufgaben für die binäre Relation $R \subseteq \{1, 2, 3, 4\}^2$ mit

$$R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3), (4, 3)\}$$

- Geben Sie die Relation R^{-1} an.
- Geben Sie die Relation $R \circ R$ an.
- Geben Sie die Relation $R \circ R \circ R$ an.
- Geben Sie die Relation $R^{-1} \circ R$ an.
- Geben Sie die Relation $R \circ R^{-1}$ an.
- Bestimmen Sie für jede der Relationen $R, R^{-1}, R \circ R, R \circ R^{-1}$ und $R^{-1} \circ R$, welche der folgenden Eigenschaften für sie zutreffen, tragen Sie die entsprechenden Wahrheitswerte in die Tabelle ein und begründen Sie Ihre Antworten:

Relation	reflexiv	irreflexiv	transitiv	symmetrisch	asymmetrisch	antisymmetrisch
R						
R^{-1}						
$R \circ R$						
$R \circ R \circ R$						
$R^{-1} \circ R$						
$R \circ R^{-1}$						

Aufgabe 8.5

Bestimmen Sie für die Relation $S \subseteq \{a, b, c, d, e\}^2$ mit

$$S = \{(a, a), (a, d), (b, e), (c, a), (d, a)\}$$

- die reflexive Hülle,
- die symmetrische Hülle,
- die transitive Hülle.
- die reflexiv-transitive Hülle.

Aufgabe 8.6

Zu jeder Menge M wird die Relation $R_M \subseteq 2^M \times 2^M$ auf der Potenzmenge der Menge M definiert durch $R_M = \{(X, Y) \mid |X| = |Y|\}$.

Für jedes $i \in \mathbb{N}$ ist die Menge $M_i \subseteq \mathbb{N}$ definiert durch $M_i = \{0, \dots, i\}$.

- Geben Sie für jedes $i \in \{0, 1, 2\}$ die Menge M_i und die Relation $R_{(M_i)}$ an.
- Zeigen Sie, dass die Relation $R_{(M_7)}$ für die Menge $M_7 = \{0, \dots, 7\}$ eine Äquivalenzrelation ist.
- In wieviele Äquivalenzklassen teilt die Relation $R_{(M_7)}$ die Menge $2^{(M_7)}$?
- Geben Sie zu jeder Äquivalenzklasse ein Element und die Mächtigkeit der Äquivalenzklasse an.
- In wieviele Äquivalenzklassen teilt die Relation $R_{(M_n)}$ die Menge $2^{(M_n)}$?
Geben Sie aus jeder Äquivalenzklasse einen Repräsentanten an.

Aufgabe 8.7

Überprüfen Sie jede der folgenden Relationen auf ihre Eigenschaften

(reflexiv , irreflexiv , transitiv , symmetrisch , asymmetrisch , antisymmetrisch) und geben Sie an, ob die Relationen Quasiordnungen, Äquivalenzrelationen, Halbordnungen, lineare Ordnungen sind.

- a. $R_1 \subseteq \emptyset^2$ mit $R_1 = \emptyset$
- b. $R_2 \subseteq \{a, b, c\}^2$ mit $R_2 = \{a, b, c\}^2$
- c. $R_3 \subseteq (\{a, b\}^*)^2$ mit $R_3 = \{(u, v) \in (\{a\}^*)^2 \mid u \sqsubseteq v\}$
- d. $R_4 \subseteq (\{a\}^*)^2$ mit $R_4 = \{(u, v) \in (\{a\}^*)^2 \mid |u| = |v|\}$
- e. $R_5 \subseteq \{0, \dots, 12\}^2$ mit $R_5 = \{(a, b) \in \{0, \dots, 12\}^2 \mid a|b\}$
- f. $R_6 \subseteq (\{a, b\}^+)^2$ mit $R_6 = \{(u, v) \in (\{a, b\}^+)^2 \mid u_1 = v_1\}$
- g. $R_7 \subseteq (\{a, b\}^*)^2$ mit $R_7 = \{(u, v) \in (\{a, b\}^*)^2 \mid |u| \leq |v|\}$
- h. $R_8 \subseteq \{1, 2, 3, 4\}^2$ mit $R_8 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$
- i. $R_9 \subseteq \{1, 2, 3, 4\}^2$ mit $R_9 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2), (4, 4)\}$
- j. $R_{10} \subseteq \{1, 2, 3, 4\}^2$ mit $R_{10} = \{(1, 1), (1, 2), (2, 3), (1, 3), (4, 4)\}$

Tragen Sie als Lösung die entsprechenden Wahrheitwerte (0 oder 1) in die folgende Tabelle ein und begründen Sie Ihre Antworten.

Eigenschaft	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	R_6	R_7	R_8	R_9	R_{10}
reflexiv										
irreflexiv										
transitiv										
symmetrisch										
asymmetrisch										
antisymmetrisch										
Quasiordnung										
Äquivalenzrelation										
Halbordnung										
lineare Ordnung										

Aufgabe 8.8

Auf der Potenzmenge der Menge $M = \{0, 1, 2\}$ ist die zweistellige Relation $R \subseteq 2^M \times 2^M$ definiert durch $R = \{(X, Y) \mid X \cap Y = \emptyset\}$.

- a. Geben Sie eine umgangssprachliche Beschreibung der Relation R an.
- b. Geben Sie eine extensionale Darstellung der Relation R (durch Angabe aller ihrer Elemente) an.
- c. Geben Sie eine umgangssprachliche Beschreibung und eine extensionale Darstellung für das Komplement $\bar{R}$ der Relation R an.
- d. Welche der Eigenschaften reflexiv, irreflexiv, transitiv, symmetrisch, asymmetrisch, antisymmetrisch haben R und $\bar{R}$?
- e. Gilt $I_{2^M} \subseteq R$? Gilt $I_{2^M} \subseteq \bar{R}$?