

6. Übung im Modul „Modellierung“

Wintersemester 2025/26

zu lösen bis 19. November 2025

Aufgabe 6.1

Welche der folgenden Aussagen gelten für die Menge $M = 2^{\{0,1\}} \cup \{0\}$?
Begründen Sie Ihre Antworten.

- | | |
|--------------------------------|-----------------------------------|
| a. $\emptyset \in M$ | g. $\{0\} \in M$ |
| b. $\emptyset \subseteq M$ | h. $\{0\} \subseteq M$ |
| c. $\{\emptyset\} \in M$ | i. $\{\{0\}\} \subseteq M$ |
| d. $\{\emptyset\} \subseteq M$ | j. $\{\{0,1\}\} \in M$ |
| e. $0 \in M$ | k. $\{0, \{1\}\} \subseteq M$ |
| f. $0 \subseteq M$ | l. $\{\{0\}, \{1\}\} \subseteq M$ |

Aufgabe 6.2

Formulieren Sie die folgenden Mengen umgangssprachlich:

$$\begin{aligned}M_1 &= \{3n \mid (n \in \mathbb{N}) \wedge (n < 5)\} \\M_2 &= \{p \in \mathbb{N} \mid (3p < 20)\} \\M_3 &= \{(i, j) \mid (i \in \mathbb{R}) \wedge (j \in \mathbb{R}) \wedge (i - j \geq 0)\} \\M_4 &= \{(x, y) \mid (x \in \mathbb{N}) \wedge (y \in \mathbb{N}) \wedge (y = x^2)\} \\M_5 &= M_3 \cap M_4\end{aligned}$$

und geben Sie auch die extensionalen Darstellungen aller endlichen Mengen M_i an.

Aufgabe 6.3

- a. Geben Sie zu jeder der folgenden informal beschriebenen Mengen formale intensionale Darstellungen an:

- M_1 : Menge aller Quadratzahlen natürlicher Zahlen, die kleiner als 50 sind,
 M_2 : Menge aller ungeraden Zahlen zwischen 10 und 20,
 M_3 : Menge aller dreistelligen Dezimaldarstellungen natürlicher Zahlen ohne führende Nullen,
 M_4 : Menge aller vollständigen 3-Gänge-Menüs, die sich zusammenstellen lassen aus
- Vorspeisen: Suppe
 - Hauptgängen: Fisch, Huhn, Tofu
 - Dessert: Eis, Pudding
- M_5 : Menge aller möglichen Getränke, die sich aus (je höchstens einem Anteil)
Ananassaft, Baileys, Cola, Orangensaft, Rum und Wodka mixen lassen.

- b. Geben Sie für jede endliche Menge die Mächtigkeit $|M_i|$ an.
c. Geben Sie für jede dieser Mengen mit $|M_i| \leq 10$, auch die extensionale Darstellung und für $|M_i| > 10$ drei Elemente der Menge an.

Aufgabe 6.4

Zeigen Sie mit Hilfe der Definitionen der Mengenoperationen, dass die Gleichungen

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \quad (1)$$

$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C) \quad (2)$$

- für die Mengen $A = \{a, b\}$, $B = \{a, c, d\}$ und $C = \{b, c\}$ gelten,
- für alle Mengen A, B und C gelten.

Aufgabe 6.5

Bestimmen Sie für die gegebenen Mengen $A = \{a, b\}$, $B = \{a, c, d\}$ und $C = \{1, 3, 4\}$:

$M_1 = \{x \in C \mid x > 2\}$	$M_7 = 2^B$
$M_2 = A \cup B$	$M_8 = 2^{(2^A)}$
$M_3 = A \cap B$	$M_9 = M_5 \cap M_7$
$M_4 = A \times \{\alpha\}$	$M_{10} = (2^B \setminus 2^A) \cup B$
$M_5 = A \times B$	$M_{11} = A \dot{\cup} B$
$M_6 = M_1 \times A$	$M_{12} = A \dot{\cup} 2^A$

und geben Sie jeweils $|M_i|$ an.

Aufgabe 6.6

Zeigen Sie, dass die Aussage $M \subseteq N \rightarrow 2^M \subseteq 2^N$

- für die Mengen $M = \{a, c\}$ und $N = \{a, b, c\}$ gilt,
- für alle Mengen M und N gilt.

Dazu benötigen Sie die Definitionen der Potenzmenge und der Beziehung $\subseteq$.

Aufgabe 6.7

Welche der folgenden Mengenfamilien sind disjunkte Zerlegungen der Vereinigung M aller Mengen der Familie?

Geben Sie auch die Menge M an. Begründen Sie Ihre Antworten.

- $\{K_{\diamond}, K_{\heartsuit}, K_{\spadesuit}, K_{\clubsuit}\}$, wobei für jede Farbe $f \in \{\diamond, \heartsuit, \spadesuit, \clubsuit\}$ die Menge K_f alle Skatkarten der Farbe f enthält,
- $\{A_0, A_1, A_2, \dots\}$, wobei für jedes $n \in \mathbb{N}$: A_n = Menge aller Fahrzeuge mit erreichbarer Höchstgeschwindigkeit von mindestens n km/h,
- $\{M_0, M_1, M_2, \dots\}$, wobei für jedes $i \in \mathbb{N}$:
 M_i = Menge aller Personen, die genau i Paar Schuhe besitzen,
- $\{4\mathbb{N}, 4\mathbb{N} + 1, 4\mathbb{N} + 2, 4\mathbb{N} + 3\}$
- $\{[-i, i] \subseteq \mathbb{R} \mid i \in \mathbb{N}\}$
- $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y \leq 0\}, \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y \geq 1\}$