

4. Übung im Modul „Modellierung“

Wintersemester 2025/26

zu lösen bis 5. November 2025

Aufgabe 4.1Transformieren Sie die folgenden Formeln φ_i jeweils in

- a. eine äquivalente Formel in DNF,
- b. eine äquivalente Formel in CNF.

$$\varphi_1 = \neg((p \rightarrow (q \wedge \neg r)) \leftrightarrow (\neg p \vee (q \wedge r)))$$

$$\varphi_2 = (p \rightarrow q) \rightarrow ((p \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg p)$$

Aufgabe 4.2

- a. Finden Sie eine aussagenlogische Formel $\varphi \in \mathbf{AL}(\{p, q, r\})$ und
- b. eine aussagenlogische Formel $\psi \in \mathbf{AL}(\{p, q, r\})$ in CNF

mit der Modellmenge $\mathbf{Mod}(\varphi) = \mathbf{Mod}(\psi) = \{W_{011}, W_{100}, W_{101}, W_{111}\}$.**Aufgabe 4.3**In dieser Aufgabe geht es um aussagenlogische Formeln $\varphi \in \mathbf{AL}(P)$, in denen ausschließlich Aussagenvariablen und Junktoren aus der Menge $\{\vee, \wedge\}$ vorkommen.

- a. Definieren Sie die Menge $\mathbf{AL}_{\{\vee, \wedge\}}(P)$ dieser eingeschränkten Formeln induktiv.
(Diese Menge ist für jede nichtleere Menge P unendlich.)
- b. Geben Sie drei Formeln $\varphi, \psi, \eta \in \mathbf{AL}_{\{\vee, \wedge\}}(\{p, q, r\})$ an mit $\text{size}(\varphi) = 1$, $\text{size}(\psi) = 5$ und $\text{size}(\eta) = 11$.
- c. Geben Sie zu jeder Menge P von Aussagenvariablen eine Belegung $W : P \rightarrow \{0, 1\}$ an, die *jede* Formel $\varphi \in \mathbf{AL}_{\{\vee, \wedge\}}(P)$ erfüllt.
- d. Weisen Sie mit Hilfe dieser Belegung W durch strukturelle Induktion nach, dass jede Formel in $\varphi \in \mathbf{AL}_{\{\vee, \wedge\}}(P)$ erfüllbar ist.

Aufgabe 4.4

Welche der folgenden Aussagen gelten:

- a.

$$\begin{aligned} \mathbf{Mod}((p \rightarrow \neg q) \wedge (p \vee q)) &\subseteq \mathbf{Mod}((p \wedge \neg p) \wedge q) \\ \mathbf{Mod}((p \wedge q) \wedge (p \rightarrow \neg q) \wedge (p \vee q)) &\subseteq \mathbf{Mod}((p \wedge \neg p) \wedge q) \end{aligned}$$
- b.

$$\begin{aligned} \{p \rightarrow \neg q, p \vee q\} &\models (p \wedge \neg p) \wedge q \\ \{p \wedge q, p \rightarrow \neg q, p \vee q\} &\models (p \wedge \neg p) \wedge q \end{aligned}$$

Aufgabe 4.5

Gegeben ist die Formelmenge $\Phi = \{\neg(a \wedge \neg b), \neg b \vee c\}$

- a. Welche der folgenden Formeln sind semantische Folgerungen aus Φ ?
(1) $\neg(a \wedge b)$ (2) $\neg a \vee c$
- b. Geben Sie eine Formel ψ an, die die Aussagenvariable c nicht enthält, so dass die Formel c eine semantische Folgerung aus der Formelmenge $\Phi \cup \{\psi\}$ ist.
- c. Geben Sie eine Formel φ an, so dass die Formelmenge $\Phi \cup \{\varphi\}$ unerfüllbar ist.

Aufgabe 4.6

- a. Geben Sie für $P = \{p, q, r, s\}$ eine aussagenlogische Formel $\varphi \in \text{AL}(P)$ an, die genau von allen Belegungen erfüllt wird, unter denen mindestens zwei der Atome falsch sind.
- b. Geben Sie zu eine zu dieser Formel äquivalente Formel $\psi \in \text{AL}(P)$ in DNF an.
- c. Geben Sie zu eine zu dieser Formel äquivalente Formel $\eta \in \text{AL}(P)$ in CNF an.