

14. Übung im Modul „Modellierung“

Wintersemester 2025/26

zu lösen bis 26. Januar 2026

Aufgabe 14.1

- a. Weisen Sie nach, dass beide in der Vorlesung vorgestellten konkreten Datentypen zum ADT Himmelsrichtungen die folgenden Axiome erfüllen:

- (1) $\forall h \in \text{HR} : \text{um}(\text{um}(h)) = h$
- (2) $\forall h \in \text{HR} : \text{links}(\text{links}(h)) = \text{rechts}(\text{rechts}(h))$
- (3) $\forall h \in \text{HR} : \text{links}(\text{um}(h)) = \text{rechts}(h)$

- b. Geben Sie einen weiteren, zu den Beispielen aus der Vorlesung verschiedenen, konkreten Datentyp zum ADT Himmelsrichtungen an und zeigen Sie, dass auch dieser die Axiome aus a. erfüllt.

- c. Zeigen Sie nur durch syntaktische Umformungen mit Hilfe der Axiome von der Folie und aus der ersten Teilaufgabe (ohne Rückgriff auf die konkreten Datentypen / Semantik), dass für *jeden* bzgl. des ADT Himmelsrichtungen korrekten konkreten Datentyp die folgenden Aussagen gelten:

- (1) $\text{rechts}(\text{N}) = \text{um}(\text{W})$
- (2) $\forall h \in \text{HR} : \text{rechts}(\text{links}(\text{rechts}(h))) = \text{rechts}(h)$
- (3) $\forall h \in \text{HR} : \text{links}(\text{links}(\text{links}(h))) = \text{rechts}(h)$

Aufgabe 14.2

In dieser Aufgabe geht es um Realisierungen des in der Vorlesung vorgestellten ADT zu Mengen natürlicher Zahlen. Alle Mengen sollen endlich sein.

- a. Geben Sie eine Realisierung des ATD an, in welchem die Mengen durch geordnete Folgen natürlicher Zahlen ohne Wiederholungen repräsentiert werden (z.B. die Menge $M = \{6, 2, 3\}$ durch die Folge $[2, 3, 6]$).

Die Trägermenge in diesem konkreten Datentypen ist also

$$A = \{(i_1, \dots, i_n) \in \mathbb{N}^* \mid \forall k \in \{1, \dots, n-1\} : i_k < i_{k+1}\}$$

Geben Sie Implementierungen (in Pseudocode) der Operationen `contains`, `add`, `remove`, `isempty` und `∅` auf dieser Trägermenge an.

Weisen Sie nach, dass Ihre Implementierungen alle auf der Folie angegebenen Axiome erfüllen.

- b. Geben Sie eine Realisierung des ATD an, in welchem die Mengen durch ihre charakteristischen Vektoren (der relevante endliche Teil der charakteristischen Funktion, bis einschließlich der letzten 1) repräsentiert werden (z.B. die Menge $M = \{6, 2, 3\}$ durch den Vektor $[\chi_M(0), \chi_M(1), \chi_M(2), \chi_M(3), \chi_M(4), \chi_M(5), \chi_M(6)] = [0, 0, 1, 1, 0, 0, 1]$).

Die Trägermenge in diesem konkreten Datentypen ist also

$$B = \{v \in \{0, 1\}^* \mid v_{|v|} = 1\} \cup \{\varepsilon\}$$

Geben Sie Implementierungen (in Pseudocode) der Operationen `contains`, `add`, `remove`, `isempty` und `∅` auf dieser Trägermenge an.

Weisen Sie nach, dass Ihre Implementierungen alle auf der Folie angegebenen Axiome erfüllen.

- c. Geben Sie eine weitere, von den oben angegebenen verschiedene, Realisierung des ATD an. Geben Sie auch für diese Realisierung Implementierungen (in Pseudocode) der Operationen `contains`, `add`, `remove`, `isempty` und `∅` an.

Weisen Sie nach, dass Ihre Implementierungen alle auf der Folie angegebenen Axiome erfüllen.

Aufgabe 14.3

- Ergänzen Sie die Spezifikation des in der Vorlesung vorgestellten ADT zu Mengen natürlicher Zahlen um sinnvolle Axiome, die korrekte Eigenschaften und Zusammenhänge zwischen den Mengenoperationen $\cup$ (union), $\cap$ (cut), $\setminus$ (diff) und der Konstante $\emptyset$ ausdrücken.
- Erweitern Sie auch die in der Vorlesung vorgestellten konkreten Datentypen um die Implementierungen (Pseudocode) dieser Operationen und begründen Sie, warum Ihre Implementierungen alle von Ihnen angegebenen Axiome erfüllen.

Aufgabe 14.4

- Modellieren Sie die Gesten im Spiel „Schere, Stein, Papier“ als ADT SSP.
(mehr dazu z.B. unter www.spieltheorie.de/Spieltheorie_Grundlagen/schnick-schnack-schnuck.htm)
Geben Sie die dazu eine geeignete Signatur Σ_{SSP} an und formulieren Sie die Spielregeln als Menge Φ_{SSP} der Axiome:
 - Schere zerschneidet (schlägt) Papier.
 - Stein schleift (schlägt) Schere.
 - Papier bedeckt (schlägt) Stein.
- Geben Sie zwei verschiedene konkrete Datentypen (Σ_{SSP} -Strukturen) an, die den ADT SSP realisieren (korrekt implementieren).
- Erweitern Sie Ihren ADT SSP um die zusätzlichen Gesten „Echse“ und „Spock“ zu einem neuen ADT SSPES mit den folgenden Regeln (www.samkass.com/theories/RPSSL.html):
 - Echse vergiftet Spock.
 - Echse frisst Papier.
 - Spock zertrümmert Schere.
 - Spock verdampft Stein.
 - Schere köpft Echse.
 - Stein zerquetscht Echse.
 - Papier widerlegt Spock.

und erweitern Sie Ihre Realisierungen entsprechend.

- Geben Sie zu jeder der folgenden Fragen eine Formel $\psi \in \text{FOL}(\Sigma_{\text{SSPES}}, \mathbb{X})$ an, so dass die Frage dem Folgerungsproblem „(Für welche Belegungen) Gilt $\Phi_{\text{SSPES}} \models \psi$?“ entspricht.

Beantworten Sie jede Frage und geben Sie alle Belegung der Individuenvariablen an, für welche die Frage positiv beantwortet wird. Begründen Sie Ihre Antworten.

Beispiele:

- Schlägt die Geste „Stein“ die Geste „Papier“?
Lösung: $\psi = \text{schlägt}(\text{Stein}, \text{Papier})$, Gilt $\Phi_{\text{SSPES}} \models \psi$? nein
- Welche Geste wird von der Geste „Stein“ geschlagen?
Lösung: $\psi = \text{schlägt}(\text{Stein}, x)$, $\Phi_{\text{SSPES}} \models \psi$ gilt für $x \mapsto \text{Schere}$ und für $x \mapsto \text{Echse}$.

- Schlägt die Geste „Papier“ die Geste „Echse“?
- Welche Geste schlägt die Geste „Echse“?
- Welche Geste, die die Geste „Echse“ schlägt, schlägt auch die Geste „Papier“?
- Welche Geste schlägt die Geste „Echse“ und wird von der Geste „Stein“ geschlagen?
- Welche Geste wird von einer Geste geschlagen, die die Geste „Echse“ schlägt?
- Welche Geste wird von einer Geste geschlagen, die die Geste „Echse“ nicht schlägt?

Aufgabe 14.5

Spezifizieren Sie die folgenden informal beschriebenen Berechnungsprobleme, indem Sie jeweils alle relevanten Vor- und Nachbedingungen formal angeben:

- a. Gesucht sind alle Teiler einer gegebenen natürlichen Zahl.
- b. In einer gegebenen $(m \times n)$ -Matrix von natürlichen Zahlen soll der größte Eintrag bestimmt werden.
- c. Die Menge aller Schnittpunkte zweier gegebenen Geraden soll bestimmt werden.
- d. Gesucht sind alle Infixe einer gegebenen Zeichenkette.
- e. Gesucht sind alle Positionen in einer gegebenen Zeichenkette, an der ein gegebenes Symbol steht.
- f. Gesucht sind alle Positionen in einer gegebenen Zeichenkette, an der eine gegebene (Teil-)Zeichenkette beginnt.

Aufgabe 14.6

Zu welcher informalen Aufgabenstellung gehört die folgende Spezifikation:

Vorbedingung: Eingabe $x \in \mathbb{N}$, $y \in \mathbb{N}$

Nachbedingung: Ausgabe $(z_1, z_2) \in \mathbb{N}^2$ mit

- a. $z_1 \geq z_2$ und
- b. $(z_1 = x \text{ und } z_2 = y)$ oder $(z_1 = y \text{ und } z_2 = x)$

Geben Sie einen Algorithmus an, welcher diese Spezifikation erfüllt.