

13. Übung im Modul „Modellierung“

Wintersemester 2025/26

zu lösen bis 21. Januar 2026

Aufgabe 13.1

Geben Sie für die Formelmenge

$$\Phi = \left\{ \begin{array}{l} \forall x \exists y E(x, y) \\ \forall x \neg E(x, x) \\ \forall x \forall y (E(x, y) \rightarrow E(y, x)) \\ \forall x \forall y (E(x, y) \rightarrow ((R(x) \wedge B(y)) \vee (B(x) \wedge R(y)))) \end{array} \right\}$$

- eine endliche Struktur $\mathcal{A} = (A, \llbracket \cdot \rrbracket_{\mathcal{A}})$ an, die Φ erfüllt,
- eine unendliche Struktur $\mathcal{B} = (B, \llbracket \cdot \rrbracket_{\mathcal{B}})$ an, die Φ erfüllt und
- eine Struktur $\mathcal{C}$ an, die Φ nicht erfüllt.
- Hat die Formelmenge Φ ein Modell mit einem Universum aus genau drei Elementen?

(Begründungen nicht vergessen.)

Aufgabe 13.2

Geben Sie für jede der folgenden Teilaufgaben einen erfüllbaren Satz $\varphi_i \in \text{FOL}(\Sigma_i)$ über der jeweils gegebenen Signatur Σ_i an, so dass für alle Σ_i -Strukturen $\mathcal{S} = (S, \llbracket \cdot \rrbracket_{\mathcal{S}}) \in \text{Mod}(\varphi_i)$ gilt

- $|S| \geq 3$ mit $\Sigma_1 = (\emptyset, \Sigma_{R_1})$ mit $\Sigma_{R_1} = \{ (=, 2) \}$
- $|S| \geq 3$ mit $\Sigma_2 = (\emptyset, \Sigma_{R_2})$ mit $\Sigma_{R_2} = \{ (P, 1), (Q, 1) \}$
- $|S| \geq 3$ mit $\Sigma_3 = (\emptyset, \Sigma_{R_3})$ mit $\Sigma_{R_3} = \{ (R, 2) \}$
- $|S| \leq 3$ mit Σ_1
- $|S| = 3$ mit einer beliebigen Signatur Σ

Aufgabe 13.3

Mit den Symbolen der Signatur $\Sigma = (\Sigma_F, \Sigma_R)$ mit $\Sigma_F = \emptyset$ und $\Sigma_R = \{ (E, 2), (=, 2) \}$ lassen sich Eigenschaften gerichteter und ungerichteter Graphen beschreiben. E repräsentiert die Kantenrelation und $=$ die Identität der Knoten des Graphen.

Geben Sie für jede der folgenden Mengen von Graphen einen Satz aus $\text{FOL}(\Sigma, \mathbb{X})$ mit einer geeigneten Menge $\mathbb{X}$ an, für welche genau alle Graphen dieser Mengen Modelle sind:

- Menge aller Graphen ohne Kanten,
- Menge aller ungerichteten Graphen ohne Schlingen,
- Menge aller vollständigen ungerichteten Graphen ohne Schlingen,
- Menge aller gerichteten Graphen mit wenigstens drei Knoten,
- Menge aller ungerichteten schlingenfreien Graphen, die einen C_3 als Teilgraphen enthalten,
- Menge aller ungerichteten schlingenfreien Graphen, die eine Clique der Größe 4 als Teilgraphen enthalten,
- Menge aller ungerichteten schlingenfreien Graphen, die einen P_4 als induzierten Teilgraphen enthalten.

Aufgabe 13.4

Zeigen Sie (durch Anwendung der Definition der Semantik der Quantoren), dass gilt:

$$\begin{aligned}\forall x P(x) &\equiv \forall y P(y) \\ P(y) \wedge \exists x P(x) &\equiv \exists x (P(x) \wedge P(y)) \\ \forall x R(x, y) &\not\equiv \forall y R(y, y)\end{aligned}$$

Aufgabe 13.5

Zeigen Sie durch äquivalente Umformungen (Anwendung der Äquivalenzen aus der vorigen Aufgabe und der Vorlesung), dass die folgenden Formeln äquivalent sind:

$$\begin{aligned}\varphi &= \neg \forall x \exists y (P(y, x) \vee \exists z \neg R(x, z)) \\ \psi &= \exists x \forall v \forall z (\neg P(v, x) \wedge R(x, z))\end{aligned}$$

Aufgabe 13.6

- Zeigen Sie, dass für je zwei Formelmengen $\Phi \subseteq \text{FOL}(\Sigma, \mathbb{X})$ und $\Psi \subseteq \text{FOL}(\Sigma, \mathbb{X})$ mit $\Phi \subseteq \Psi$ immer $\text{Mod}(\Phi) \supseteq \text{Mod}(\Psi)$ gilt.
- Zeigen Sie durch ein Gegenbeispiel, dass die Umkehrung dieser Aussage (aus $\text{Mod}(\Phi) \supseteq \text{Mod}(\Psi)$ folgt $\Phi \subseteq \Psi$) nicht gilt.