

12. Übung im Modul „Modellierung“

Wintersemester 2025/26

zu lösen bis 14. Januar 2026

Aufgabe 12.1

Geben Sie für jeden der folgenden umgangssprachlich beschriebenen Sachverhalte an:

- O: die Menge der Individuen, um die es geht,
 E: alle relevanten Eigenschaften der Individuen,
 B: alle relevanten Beziehungen zwischen den Individuen,
 F: alle relevanten Funktionen auf der Menge der Individuen,
 φ : eine prädikatenlogische Formel, die den Sachverhalt beschreibt.
- Nichten einer Person sind alle weiblichen Kinder von Geschwistern dieser Person.
 - Das Quadrat jeder geraden Zahl ist gerade.
 - Nicht jede Primzahl ist ungerade.
 - Zwischen 21 und 24 gibt es keine durch 5 teilbare natürliche Zahl.
 - Alle Punkte auf dem Einheitskreis in der Ebene haben denselben Abstand zum Punkt $(0,0)$.

Aufgabe 12.2

Geben Sie für die Signaturen $\Sigma_{F1} = \{(c, 0)\}$, $\Sigma_{F2} = \{(f, 1)\}$ und $\Sigma_R = \{(R, 2)\}$ jeweils zwei verschiedene Elemente (sofern diese existieren) der folgenden Mengen an. Falls die Menge weniger als zwei Elemente enthält, geben Sie die gesamte Menge an.

Beispiel: zwei verschiedene Elemente aus $\text{Term}(\Sigma_{F2}, \{x, y\})$: $y, f(f(x))$

- | | | |
|---|---|--|
| a. $\text{Term}(\Sigma_{F1}, \emptyset)$ | g. $\text{Atom}((\Sigma_{F1}, \Sigma_R), \emptyset)$ | m. $\text{Atom}((\emptyset, \Sigma_R), \emptyset)$ |
| b. $\text{Term}(\Sigma_{F2}, \emptyset)$ | h. $\text{Atom}((\Sigma_{F1}, \Sigma_R), \{x, y\})$ | n. $\text{Atom}((\emptyset, \Sigma_R), \{x, y\})$ |
| c. $\text{Term}(\Sigma_{F1}, \{x, y\})$ | i. $\text{Atom}((\Sigma_{F2}, \Sigma_R), \emptyset)$ | o. $\text{Atom}((\Sigma_F, \emptyset), \emptyset)$ |
| d. $\text{Term}(\Sigma_{F1} \cup \Sigma_{F2}, \emptyset)$ | j. $\text{Atom}((\Sigma_{F2}, \Sigma_R), \{x, y\})$ | p. $\text{Atom}((\Sigma_F, \emptyset), \{x, y\})$ |
| e. $\text{Term}(\Sigma_{F1} \cup \Sigma_{F2}, \{x, y\})$ | k. $\text{Atom}((\Sigma_{F1} \cup \Sigma_{F2}, \Sigma_R), \emptyset)$ | |

Aufgabe 12.3

Gegeben sind die Signatur $\Sigma_F = \{(c, 0), (a, 1), (b, 1), (f, 2)\}$, die Struktur $\mathcal{A} = (A, \llbracket \cdot \rrbracket_{\mathcal{A}})$ mit

$$\begin{aligned}
 A &= \{0, 1\} \\
 \llbracket c \rrbracket_{\mathcal{A}} &= 0 \\
 \forall d \in A : \llbracket a \rrbracket_{\mathcal{A}}(d) &= 1 - d \\
 \forall d \in A : \llbracket b \rrbracket_{\mathcal{A}}(d) &= d \\
 \forall d, e \in A : \llbracket f \rrbracket_{\mathcal{A}}(d, e) &= |d - e|
 \end{aligned}$$

die Variablenmenge $\mathbb{X} = \{x, y\}$,

die Terme $s = f(a(y), f(x, c))$ und $t = f(f(a(x), b(y)), x)$ und

die Belegung $\alpha : \{x, y\} \rightarrow A$ mit $\alpha(x) = 0$ und $\alpha(y) = 1$.

- Bestimmen Sie die Werte der Terme s und t in der Interpretation $(\mathcal{A}, \alpha)$.
- Finden Sie eine Belegung $\beta : \{x, y\} \rightarrow A$ mit den folgenden Eigenschaften:
 - $\llbracket s \rrbracket_{(\mathcal{A}, \alpha)} = \llbracket s \rrbracket_{(\mathcal{A}, \beta)}$
 - $\llbracket t \rrbracket_{(\mathcal{A}, \alpha)} \neq \llbracket t \rrbracket_{(\mathcal{A}, \beta)}$

Weisen Sie nach, dass die von Ihnen angegebene Belegung diese beiden Eigenschaften erfüllt.

Aufgabe 12.4

Gegeben sind die Signatur $\Sigma = (\Sigma_F, \Sigma_R)$ mit $\Sigma_F = \{(a, 0), (f, 2)\}$, $\Sigma_R = \{(E, 1), (R, 2)\}$ und die Variablenmenge $\mathbb{X} = \{x, y, z\}$.

Geben Sie für alle Zeichenketten in der ersten Spalte der Tabelle an (Wahrheitswerte 0, 1), ob es sich um korrekt geformte Terme oder prädikatenlogische Formeln handelt. Falls dies der Fall ist, geben Sie die Mengen der im Term oder in der Formel gebunden bzw. frei vorkommenden Variablen an.

Zeichenkette	Term	Formel	unkorrekt	freie Variablen	gebundene Var.
$f(a, x)$					
$E(f)$					
$\forall x (R(a, x) \vee E(f(x, y)))$					
$R(x, f(y, z))$					
$x \wedge f(y, a)$					
$R(x, z) \vee \forall x \neg R(x, y)$					
$\forall x (\neg R(x, y) \vee f(a, \neg E(f(x, y))))$					

Aufgabe 12.5

Gegeben sind die Signatur $\Sigma = (\Sigma_F, \Sigma_R)$ mit $\Sigma_F = \{(a, 0), (f, 2)\}$, $\Sigma_R = \{(E, 1), (R, 2)\}$, die Variablenmenge $\mathbb{X} = \{x, y, z\}$ und die Σ -Strukturen

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A} &= (A, \llbracket \cdot \rrbracket_{\mathcal{A}}) \text{ mit } A = 2^{\{0,1,2\}} \\
 \llbracket a \rrbracket_{\mathcal{A}} &= \{0\} \\
 \text{für alle } M, N \in 2^{\{0,1,2\}} \text{ gilt: } \llbracket f \rrbracket_{\mathcal{A}}(M, N) &= M \cap N \\
 \llbracket E \rrbracket_{\mathcal{A}} &= \{\emptyset\}, \\
 \llbracket R \rrbracket_{\mathcal{A}} &= \{(M, N) \mid M, N \in 2^{\{0,1,2\}} \text{ und } |M| = |N|\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{B} &= (B, \llbracket \cdot \rrbracket_{\mathcal{B}}) \text{ mit } B = \mathbb{Z} \text{ und } \llbracket a \rrbracket_{\mathcal{B}} = 2 \\
 \text{für alle } m, n \in \mathbb{Z} \text{ gilt: } \llbracket f \rrbracket_{\mathcal{B}}(m, n) &= m + n \\
 \llbracket E \rrbracket_{\mathcal{B}} &= \mathbb{P} \quad (\text{Menge aller Primzahlen}) \\
 \llbracket R \rrbracket_{\mathcal{B}} &= \{(m, n) \mid m|n\} \quad (\text{Teilerrelation } |)
 \end{aligned}$$

Die Belegung $\alpha : \mathbb{X} \rightarrow 2^{\{0,1,2\}}$ ist die Abbildung mit $\alpha(x) = \emptyset$, $\alpha(y) = \{0, 1, 2\}$ und $\alpha(z) = \{1, 2\}$.

Die Belegung $\beta : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Z}$ ist die Abbildung mit $\beta(x) = 0$, $\beta(y) = 1$ und $\beta(z) = 2$.

Tragen Sie für jede Zeichenkette in der linken Spalte der folgenden Tabelle ihren Wert in den Interpretationen $(\mathcal{A}, \alpha)$ und $(\mathcal{B}, \beta)$ in die Tabelle ein.

Zeichenkette s	$\llbracket s \rrbracket_{(\mathcal{A}, \alpha)}$	$\llbracket s \rrbracket_{(\mathcal{B}, \beta)}$
$f(a, f(a, x))$		
$E(f(x, a))$		
$\forall x \forall y ((E(x) \wedge R(x, y)) \rightarrow E(y))$		
$E(f(x, y)) \leftrightarrow R(x, f(y, x))$		
$\forall x \forall y (R(x, a) \wedge R(y, a) \rightarrow R(f(x, y), a))$		
$\forall y \forall z (R(x, z) \wedge R(y, z) \rightarrow R(f(x, y), z))$		
$\forall y \forall z (\neg(\neg(R(x, y) \wedge R(x, z))) \vee R(x, f(y, z)))$		

Aufgabe 12.6

Drücken Sie die Aussage der Formel $\forall x (P(x) \vee \exists y (P(y) \wedge R(x, y)))$ in den folgenden Strukturen umgangssprachlich aus:

- $\mathcal{A} = (\mathbb{N}, \llbracket \cdot \rrbracket_{\mathcal{A}})$ mit $\llbracket P \rrbracket_{\mathcal{A}} = \{0\}$ und $\llbracket R \rrbracket_{\mathcal{A}} = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid x > y\}$.
- $\mathcal{B} = (\mathbb{N}, \llbracket \cdot \rrbracket_{\mathcal{B}})$ mit $\llbracket P \rrbracket_{\mathcal{B}} = \{x \in \mathbb{N} \mid 3 \mid x\}$ und $\llbracket R \rrbracket_{\mathcal{B}} = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid |x - y| \leq 1\}$.
- $\mathcal{C} = (C, \llbracket \cdot \rrbracket_{\mathcal{C}})$ mit $C =$ Menge aller Studenten aus 25MIB, $x \in \llbracket P \rrbracket_{\mathcal{C}}$ gdw. x wenigstens eine Aufgabe der Bonusserie gelöst hat und $(x, y) \in \llbracket R \rrbracket_{\mathcal{C}}$ gdw. x morgens später als y aufsteht.

Aufgabe 12.7

Welche der folgenden Strukturen erfüllen die Formel

$$\varphi = \exists x P(x) \wedge \exists x (Q(x) \wedge \neg P(x)) \wedge \exists x \forall y (R(x, y) \rightarrow (Q(x) \leftrightarrow \neg Q(y)))$$

- $\mathcal{A} = (\{a, b\}, \llbracket \cdot \rrbracket_{\mathcal{A}})$ mit $\llbracket P \rrbracket_{\mathcal{A}} = \{a\}$, $\llbracket Q \rrbracket_{\mathcal{A}} = \{b\}$, $\llbracket R \rrbracket_{\mathcal{A}} = \{(a, b), (b, a)\}$,
- $\mathcal{B} = (\mathbb{N}, \llbracket \cdot \rrbracket_{\mathcal{B}})$ mit $\llbracket P \rrbracket_{\mathcal{B}} = \{0\}$, $\llbracket Q \rrbracket_{\mathcal{B}} = 2\mathbb{N}$, $\llbracket R \rrbracket_{\mathcal{B}} = \{(n, n+1) \mid n \in \mathbb{N}\}$,
- $\mathcal{C} = (2^{\{a, b, c\}}, \llbracket \cdot \rrbracket_{\mathcal{C}})$ mit $\llbracket P \rrbracket_{\mathcal{C}} = \{\{a, b\}\}$, $\llbracket Q \rrbracket_{\mathcal{C}} = \{\emptyset, \{b\}\}$, $\llbracket R \rrbracket_{\mathcal{C}} = \{(M, N) \mid M \subseteq N\}$
- $\mathcal{D} = (\{a, b, c\}^*, \llbracket \cdot \rrbracket_{\mathcal{D}})$ mit $\llbracket P \rrbracket_{\mathcal{D}} = \{w \in \{a, b, c\}^* \mid w_1 = a\}$,
 $\llbracket Q \rrbracket_{\mathcal{D}} = \{w \in \{a, b\}^* \mid |w| = 3\}$, $\llbracket R \rrbracket_{\mathcal{D}} = \{(u, v) \in (\{a, b, c\}^*)^2 \mid u \sqsubseteq v\}$

Begründen sie Ihre Antworten.

Aufgabe 12.8

Geben Sie für die prädikatenlogische Formel $\varphi = \forall x \exists y (P(x, y) \wedge \neg P(y, x))$

- eine Struktur $\mathcal{A} = (A, \llbracket \cdot \rrbracket_{\mathcal{A}}) \in \text{Mod}(\varphi)$ mit dem Universum $A = \{a, b, c\}$ an,
- eine Struktur $\mathcal{B} = (B, \llbracket \cdot \rrbracket_{\mathcal{B}}) \notin \text{Mod}(\varphi)$ mit einem endlichen Universum B an,
- eine Struktur $\mathcal{C} = (C, \llbracket \cdot \rrbracket_{\mathcal{C}}) \in \text{Mod}(\varphi)$ mit einem unendlichen Universum C an,
- eine Struktur $\mathcal{D} = (D, \llbracket \cdot \rrbracket_{\mathcal{D}}) \notin \text{Mod}(\varphi)$ mit einem unendlichen Universum D an.

Weisen Sie für jede Struktur nach, dass sie die Anforderungen erfüllt.