

11. Übung im Modul „Modellierung“

Wintersemester 2025/26

zu lösen bis 7. Januar 2026

Aufgabe 11.1

Gegeben sind die Signatur $\Sigma_F = \{(c, 0), (a, 1), (b, 1), (f, 2)\}$ und die Zeichenketten

$$t_1 = a(b(c)) \quad t_2 = c(b(a(x))) \quad t_3 = a(f(a, f(x, b(c)))) \quad t_4 = f(b(f(x, b(a(c))))), b(y(c)))$$

- Welche dieser Zeichenketten sind Σ_F -Terme, welche sind Σ_F -Grundterme:
- Geben Sie für jeden der Σ_F -Terme t_i seine Größe $\text{size}(t_i)$ und die Menge der in ihm vorkommenden Variablen $\text{var}(t_i)$ an.

Aufgabe 11.2

Gegeben ist die Signatur $\Sigma_F = \{(c, 0), (a, 1), (b, 1), (f, 2)\}$.

Bestimmen Sie die Werte der folgenden Σ_F -Grundterme

$$\begin{aligned} r &= a(b(b(c))) \\ s &= f(a(b(b(c))), b(a(a(c)))) \\ t &= f(c, f(a(c), f(f(a(c), b(c)), c))) \\ u &= f(f(b(a(c)), c), f(a(c), f(b(c), a(c)))) \end{aligned}$$

in jeder der Σ_F -Strukturen

- $\mathcal{A} = (A, \llbracket \cdot \rrbracket_{\mathcal{A}})$ mit

$$\begin{aligned} A &= \{0, 1\} \\ \llbracket c \rrbracket_{\mathcal{A}} &= 0 \\ \forall d \in A : \llbracket a \rrbracket_{\mathcal{A}}(d) &= 1 - d \\ \forall d \in A : \llbracket b \rrbracket_{\mathcal{A}}(d) &= d \\ \forall d, e \in A : \llbracket f \rrbracket_{\mathcal{A}}(d, e) &= |d - e| \end{aligned}$$

- $\mathcal{B} = (B, \llbracket \cdot \rrbracket_{\mathcal{B}})$ mit

$$\begin{aligned} B &= \{a, b\}^* \\ \llbracket c \rrbracket_{\mathcal{B}} &= \varepsilon \\ \forall u \in B : \llbracket a \rrbracket_{\mathcal{B}}(u) &= u \circ a \\ \forall u \in B : \llbracket b \rrbracket_{\mathcal{B}}(u) &= u \circ b \\ \forall u, v \in B : \llbracket f \rrbracket_{\mathcal{B}}(u, v) &= u \circ v \end{aligned}$$

Aufgabe 11.3

- Warum gilt für alle Signaturen Σ_F ohne Konstantensymbole $\text{Term}(\Sigma_F, \emptyset) = \emptyset$?
- Zeigen Sie, dass für jede Σ_F -Struktur $\mathcal{A}$ die Relation $\equiv_{\mathcal{A}}$ eine Äquivalenzrelation auf der Menge $\text{Term}(\Sigma_F, \emptyset)$ ist.

Aufgabe 11.4

Geben Sie für die Signatur $\Sigma = (\Sigma_F, \emptyset)$ mit $\Sigma_F = \{(a, 0), (b, 0), (c, 1), (d, 2), (e, 2)\}$ und die Σ_F -Grundterme

$$s = c(d(a, b)) \quad t = e(c(a), c(c(a)))$$

zwei Σ -Strukturen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ an, welche die beiden folgenden Bedingungen erfüllen:

1. $\llbracket s \rrbracket_{\mathcal{A}} = \llbracket t \rrbracket_{\mathcal{A}}$ und
2. $\llbracket s \rrbracket_{\mathcal{B}} \neq \llbracket t \rrbracket_{\mathcal{B}}$

Zeichnen Sie die Termbäume der Terme s und t und weisen Sie nach, dass Ihre Strukturen beide Bedingungen 1. und 2. erfüllen.

Aufgabe 11.5

Geben Sie zur Signatur $\Sigma = (\Sigma_R, \Sigma_F)$ mit $\Sigma_R = \{(R, 2)\}$ und $\Sigma_F = \{(f, 1), (g, 2)\}$ zwei Σ -Strukturen $\mathcal{S}_1 = (S_1, \llbracket \cdot \rrbracket_{\mathcal{S}_1})$ und $\mathcal{S}_2 = (S_2, \llbracket \cdot \rrbracket_{\mathcal{S}_2})$ mit Trägermengen verschiedener Mächtigkeit an, in denen für alle Elemente x, y, z der jeweiligen Trägermengen **alle** folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- a. $\forall x \in S_i : \llbracket f \rrbracket_{\mathcal{S}_i}(x) \neq x$ und $\forall x \in S_i : \llbracket f \rrbracket_{\mathcal{S}_i}(\llbracket f \rrbracket_{\mathcal{S}_i}(x)) = x$
- b. $\forall (x, y) \in S_i^2 : \llbracket g \rrbracket_{\mathcal{S}_i}(x, y) = \llbracket g \rrbracket_{\mathcal{S}_i}(y, x)$
- c. $\llbracket R \rrbracket_{\mathcal{S}_i}$ ist eine Halbordnung, aber keine lineare Ordnung.
- d. Für alle $(x, y) \in \llbracket R \rrbracket_{\mathcal{S}_i}$ gilt $(\llbracket f \rrbracket_{\mathcal{S}_i}(y), \llbracket f \rrbracket_{\mathcal{S}_i}(x)) \in \llbracket R \rrbracket_{\mathcal{S}_i}$ und $(\llbracket g \rrbracket_{\mathcal{S}_i}(x, z), \llbracket g \rrbracket_{\mathcal{S}_i}(y, z)) \in \llbracket R \rrbracket_{\mathcal{S}_i}$.

Weisen Sie nach, dass beide von Ihnen angegebenen Strukturen alle Bedingungen erfüllen.