

---

**7. Übung zu Theoretische Informatik: Berechenbarkeit und Komplexität**

Wintersemester 2024/25

zu lösen bis 9. Dezember 2024

---

**Aufgabe 7.1:**

1. Bestimmen Sie schrittweise die Werte  $A(2, 4)$ ,  $A(3, 3)$ ,  $A(4, 2)$  der Ackermann-Funktion und geben Sie jeweils an, für welche kleineren Argumente  $x, y \in \mathbb{N}$  die Werte  $A(x, y)$  dabei in welcher Reihenfolge berechnet werden müssen.
2. Zeigen Sie, dass für die Ackermann-Funktion  $A : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$  gilt

$$\forall x, y \in \mathbb{N} : A(x + 1, y) \geq A(x, y + 1)$$

Hinweis: Induktion nach  $y$ **Aufgabe 7.2:**Zeigen Sie, dass für die Ackermann-Funktion für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt:

$$A(0, n) = n + 1$$

$$A(1, n) = 2 + (n + 3) - 3$$

$$A(2, n) = 2(n + 3) - 3$$

$$A(3, n) = 2^{(n+3)} - 3$$

**Aufgabe 7.3:**Die Sudan-Funktion  $S : \mathbb{N}^3 \rightarrow \mathbb{N}$  ist definiert durch  $\forall x, y, z \in \mathbb{N}$ :

$$S(x, y, 0) = x + y$$

$$S(x, 0, n + 1) = x$$

$$S(x, y + 1, n + 1) = S(S(x, y, n + 1), S(x, y, n + 1) + y + 1, n)$$

Zeigen Sie  $\forall x, y \in \mathbb{N} : S(x, y, 1) = 2^y(x + 2) - y - 2$ **Aufgabe 7.4:**Im indirekten Beweis für  $A \notin \text{LOOP}$  wurde die Funktion $d : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  mit  $\forall n \in \mathbb{N} : d(n) = A(n, n)$  verwendet.Zeigen Sie, dass aus der Annahme  $A \in \text{LOOP}$  folgt, dass auch  $d \in \text{LOOP}$  gilt.**Aufgabe 7.5:**Zeigen Sie den Induktionsschritt im Beweis des Satzes ( $\forall p \in \text{Loop} \exists k \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} : g_p(n) < A(k, n)$ ) für  $p = \text{Loop}(i, q)$  (Hinweis:  $k = k_q + 1$ )**Aufgabe 7.6:**Warum lässt sich der Diagonalisierungs-Beweis für  $\text{WHILE} \cap \text{TOTAL} \not\subseteq \text{LOOP}$  nicht auch mit  $\text{WHILE}$  statt  $\text{LOOP}$  führen?