2. Übung zu Theoretische Informatik: Berechenbarkeit und Komplexität
Wintersemester 2024/25 zu lösen bis 7. November 2024

Aufgabe 2.1:

In der Vorlesung wurde eine Darstellung für TM als Binärwörter vorgestellt.

a. Bestimmen Sie diese Darstellung für die TM
$M = (\{a\}, \{q,p\}, \{a,\square\}, \{(a,q,a,q,R), (\square,q,\square,p,L), (a,p,\square,p,L)\}, q, \square)$

b. Geben Sie eine DTM M_C an, die genau dann hält, wenn das Eingabewort die korrekte Darstellung einer TM ist (Wie auf den Folien zur Vorlesung genügt auch hier die Darstellung der Übergangsrelation).

c. Zeigen Sie, dass die DTM M_C aus Teilaufgabe b. bei Eingabe der Darstellung von M aus Teilaufgabe a. hält.

Aufgabe 2.2:

Leiten Sie aus der Spezifikation für Paar-Codierungen her, dass in jeder Paar-Codierung die Funktion $C' : \mathbb{N}^2 \to T^{-1}(1)$ mit $\forall (x,y) \in \mathbb{N} : C'(x,y) = C(x,y)$ bijektiv ist.

Aufgabe 2.3:

a. Zeigen Sie, dass für $f(n) = \max\{x \in \mathbb{N} \mid 2^x \leq n\}$ die Funktionen

$$\begin{aligned} C(x,y) &= 2^{x+y} + x \\ P_1(n) &= n - 2^{f(n)} \\ P_2(n) &= f(n) - P_1(n) \\ T(n) &= (n \in \{2^i + j \mid i \in \mathbb{N} \wedge j \leq i\}) \end{aligned}$$

eine Paar-Codierung bilden,

b. geben Sie die Werte $C(2,3), C(3,2), T(10), T(12), P_1(10), P_2(10)$ an.

Aufgabe 2.4:

Geben Sie für jede der Paar-Codierungen aus der Vorlesung an:

a. die Funktionen P_1, P_2, T,

b. den Nachweis, dass diese Funktionen die Spezifikation für Paar-Codierungen erfüllen,

c. die Werte $C(2,3), C(3,2), T(10), T(12), P_1(12), P_2(12)$.

Aufgabe 2.5:

Geben Sie für jede der Listen-Codierungen L aus der Vorlesung an:

a. die Funktionen D_i

b. Algorithmen zur Berechnung von L und D_i

c. den Nachweis, dass $\forall x = [x_0, \dots, x_n] \in \mathbb{N}^* : D_i(L(x)) = x_i$
Was ist eine sinnvolle Definition für $D_i(x)$, falls $i > |x|$?

d. die Werte $L([]), L([5]), L([2, 3, 0])$

Aufgabe 2.6:

Geben Sie für die Baum-Codierung $B : \mathsf{Term}(\Sigma) \to \mathbb{N}$ und die Signatur Σ aus der Vorlesung an:

a. die Testfunktion $T : \mathbb{N} \to \{0, 1\}$

b. eine Decodierung $D : \mathbb{N} \to \mathsf{Term}(\Sigma)$

c. Algorithmen zur Berechnung von T und D

d. den Nachweis, dass $\forall t \in T^{-1}(1) : D(B(t)) = t$

e. die Werte $B(a), B(g(a)), B(f(g(a), a))$