

---

**11. Übung zu Theoretische Informatik: Berechenbarkeit und Komplexität**

Wintersemester 2024/25

zu lösen bis 13. Januar 2025

---

**Aufgabe 11.1:**

Zeigen Sie, dass gilt

1.  $\{x^2 \mid x \in \mathbb{N}\} \leq_m 2\mathbb{N}$
2.  $\text{REC}(\text{NFA}) \leq_m \text{REC}(\text{DFA})$
3.  $\mathbb{N} \leq_m H_0$
4.  $\{G = (V, E) \mid G \text{ enthält einen Eulerkreis}\} \leq_m 2\mathbb{N}$
5.  $H \leq_m H_S$  (Gegenrichtung zur Vorlesung)

**Aufgabe 11.2:**Zeigen Sie, dass die Reduktion  $\leq_m$  reflexiv und transitiv ist.

Ist sie auch symmetrisch, antisymmetrisch, linear?

**Aufgabe 11.3:**

Zeigen Sie, dass die beiden folgenden Formeln äquivalent sind:

$$\forall P, Q \subseteq \mathbb{N} : ((P \leq_m Q \wedge Q \in \text{REC}) \rightarrow P \in \text{REC})$$

$$\forall P, Q \subseteq \mathbb{N} : ((P \leq_m Q \wedge P \notin \text{REC}) \rightarrow Q \notin \text{REC})$$

**Aufgabe 11.4:**Zeigen Sie  $\overline{T} \notin \text{RE}$  durch Reduktion auf eine geeignete Menge.**Aufgabe 11.5:**Für die Klasse aller PCP über dem Alphabet  $X = \{0\}$ :

1. Geben Sie je eine lösbare und eine nicht lösbare Instanz mit je drei Paaren  $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)\}$  an.
2. Geben Sie ein Entscheidungsverfahren an.

### Aufgabe 11.6:

Stellen Sie fest, welche der folgenden Aussagen gelten und begründen Sie:

1.  $U \subseteq \overline{E}$
2.  $U \subseteq \text{co}E$
3.  $\text{co}E \subseteq U$
4.  $U \subseteq \text{co}U$
5.  $\text{co}U \subseteq U$
6.  $E \subseteq \overline{U}$
7.  $E \subseteq \text{co}U$
8.  $\overline{E} \subseteq U$
9.  $E \cap \overline{E} = \emptyset$
10.  $U \cap \overline{U} = \emptyset$
1.  $\text{RE} \cap \overline{\text{RE}} = \emptyset$
2.  $\text{RE} \cap \text{coRE} = \emptyset$
3.  $\text{RE} \subseteq \text{coRE}$
4.  $\text{coRE} \subseteq \text{RE}$
5.  $\text{RE} \cap \text{coRE} \subseteq \text{RE}$
6.  $\text{RE} \cap \text{coRE} \subseteq \text{REC}$
7.  $\text{REC} \subseteq \text{coREC}$
8.  $\text{coREC} \subseteq \text{REC}$
9.  $\text{REC} \cap \text{coREC} \subseteq \text{RE}$
10.  $\text{REC} \cap \text{coREC} \subseteq \text{REC}$
11.  $\text{REC} \cap \text{coRE} = \emptyset$

### Aufgabe 11.7:

Zeigen Sie:

1.  $\forall \varphi \in \text{FOL}(\Sigma, \mathbb{X}) : \varphi$  allgemeingültig gdw.  $\neg\varphi$  unerfüllbar
2.  $\forall \varphi, \psi \in \text{FOL}(\Sigma, \mathbb{X}) : \varphi \models \psi$  gdw.  $\varphi \wedge \neg\psi$  unerfüllbar