Prof. Dr. Sibylle Schwarz, HTWK Leipzig, FIM sibylle.schwarz@htwk-leipzig.de

1. Übung zu Theoretische Informatik: Berechenbarkeit und Komplexität

Wintersemester 2024/25 zu lösen bis 28. Oktober 2024

Aufgabe 1.1:

Gegeben ist die TM $M = (\{0,1\}, \{a,b,c,d,e,f,g,h\}, \{0,1,\square\}, \delta, a, \{h\}, \square)$ mit

$$\delta = \left\{ \begin{array}{l} (0,a,0,c,L),(1,a,1,c,L),(\square,a,1,d,R),(\square,c,1,d,R), \\ (0,d,0,d,R),(1,d,1,d,R),(\square,d,\square,e,L),(0,e,0,f,L), \\ (1,e,1,f,L),(\square,e,\square,b,N),(0,f,\square,f,L),(1,f,\square,f,L), \\ (\square,f,\square,b,N),(\square,b,\square,g,R),(\square,g,\square,g,R),(1,g,1,h,N) \end{array} \right\}$$

a. Geben Sie für jedes Wort $w \in \{0,1\}^n$ mit $n \in \{0,1,2\}$ die Berechnung von M bei Eingabe von w bis zum Halt oder Erreichen eines Zustandes an, in dem offensichtlich ist, dass die Berechnung nicht terminiert.

b. Beschreiben Sie die Arbeitsweise von M kurz.

c. Welche Funktion $\{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$ berechnet M?

d. Welche Funktion $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ berechnet M, wenn Ein- und Ausgabe als Binärdarstellung natürlicher Zahlen betrachtet werden?
(Die Eingabe ε wird nicht als Binärdarstellung einer natürlichen Zahl interpretiert, braucht hier also nicht betrachtet zu werden.)

e. Geben Sie die Menge aller Wörter $\in \{0,1\}^*$ an, bei deren Eingabe M nach endlich vielen Schritten hält.

Aufgabe 1.2:

Konstruieren Sie je eine Turingmaschine, welche

a. Genau bei Eingabe jedes Wortes aus der Sprache $L = \{1^n \bullet 1^{3n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ hält.

b. die Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $\forall x \in \mathbb{N} : f(x) = 3x$ berechnet,

c. die folgende Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ berechnet:

$$\forall x \in \mathbb{N} : f(x) = \begin{cases} x/3 & \text{falls } x \equiv 0 \pmod 3 \\ \text{nicht definiert} & \text{sonst} \end{cases}$$

Erkennen und nutzen Sie dabei die Zusammenhänge zwischen den Teilaufgaben.

Aufgabe 1.3:

Geben Sie eine 2-Band-TM an, die genau dann hält, wenn zu Beginn der Berechnung das Wort $v \in \{0,1\}^*$ auf Band 1 ein Infix des Wortes $w \in \{0,1\}^*$ auf Band 2 ist.

Aufgabe 1.4:

Geben Sie eine 3-Band-TM an, welche zu einem gegebenen Wort $w \in \{a,b\}^*$ die Anzahl der in w vorkommenden a in Unärdarstellung auf Band 2 und die Anzahl der in w vorkommenden b in Unärdarstellung auf Band 3 schreibt.

Aufgabe 1.5:

Zeigen Sie, dass die zweistellige Funktion $f : \{a,b\}^* \times \{b,c\}^* \to \{a,b,c\}^*$ mit $f(u,v) = w$ mit

$$\begin{array}{ll} \forall i \in \{1,\ldots,\min(|u|,|v|)\}: & w_{2i-1} = u_i \wedge w_{2i} = v_i \\ \text{falls } |u| > |v|\text{: } \forall i \in \{|v|+1,\ldots,|u|\}: & w_{2|v|+i} = u_i \\ \text{falls } |v| > |u|\text{: } \forall i \in \{|u|+1,\ldots,|v|\}: & w_{2|u|+i} = v_i \end{array}$$

Turing-berechenbar ist.
Konstruieren Sie dazu eine Zwei- oder Mehrband-Turingmaschine M, welche genau die Sprache $L = \{a,b\}^* \times \{b,c\}^*$ durch Halt akzeptiert und für jede akzeptierte Eingabe die Funktion $f_M(u,v) = f(u,v)$ berechnet.
In der Startkonfiguration stehen die Eingaben u auf Band 1 und v auf Band 2, alle anderen (evtl. vorhandenen) Bänder sind leer.
Geben Sie an, auf welchem Band bei Halt die Ausgabe abzulesen ist.
Kommentieren Sie die Funktionsweise Ihrer Turingmaschine und geben Sie wenigstens drei aussagekräftige Berechnungen an.

Aufgabe 1.6:

Zeigen Sie, dass die zweistellige Funktion $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f(x,y) = |x-y|$ Turing-berechenbar ist.
Konstruieren Sie dazu eine Zwei- oder Mehrband-Turingmaschine M, welche genau die Sprache $L = (\{1\}^*)^2$ durch Halt akzeptiert und für jede akzeptierte Eingabe die Funktion $f_M(x,y) = f(x,y)$ (Eingaben und Ergebnis in Unärdarstellung) berechnet.
In der Startkonfiguration stehen die Eingaben x auf Band 1 und y auf Band 2, alle anderen (evtl. vorhandenen) Bänder sind leer. Ausgabe bei Halt ist der Inhalt des Bandes 1.
Kommentieren Sie die Funktionsweise Ihrer Turingmaschine und geben Sie wenigstens drei aussagekräftige Berechnungen an.

Aufgabe 1.7:

Ein *beidseitig unendliches Band* ist ein Band, dessen Kopf Positionen $\in \mathbb{Z}$ enthält.
Ein *einseitig unendliches Band* ist ein Band, dessen Kopf nur Positionen $\in \mathbb{N}$ enthält.

a. Zeigen Sie, wie man einen Stack (nur Operationen empty, push, pop, top) durch ein einseitig unendliches Band mit den für TM üblichen Übergängen simulieren kann.
   Geben Sie dazu zu jeder Stack-Operation die entsprechenden Folgen von Konfigurationsübergängen der dazu konstruierten TM an.

b. Zeigen Sie, wie man ein beidseitig unendliches Band durch zwei Stacks simulieren kann.
   Geben Sie dazu zu jedem möglichen Konfigurationsübergang die entsprechende Folge von Stack-Operationen an.

c. Wie lassen sich die Konstruktionen aus den ersten beiden Teilaufgaben zu einer Simulation einer Einband-TM mit beidseitig unendlichem Band durch eine Zweiband-TM mit zwei einseitig unendlichen Bändern kombinieren.