Prof. Dr. Sibylle Schwarz, HTWK Leipzig, FIM sibylle.schwarz@htwk-leipzig.de

Bonus. Übung im Modul „Modellierung“ Wintersemester 2024/25
zu lösen bis 8. Januar 2025

Aufgabe Bonus.1

a. Geben Sie vier Mengen A, B, C, D an, so dass $A \cap B = C \cap D = \emptyset$, $A \cap C \neq \emptyset$, $1 \in A \cap D$, $B \cap C = \{2\}$, $B \cap D = \{3\}$ und $B \setminus (C \cup D) \neq \emptyset$ gilt.

b. Welche der folgenden Aussagen sind für jedes beliebige Paar von Mengen $(A, B) \in (2^M)^2$ wahr und welche falsch? Begründen Sie Ihre Antworten.

   (a) $(A \subseteq B) \rightarrow (A \setminus B \neq \emptyset)$,
   (b) $(B \subseteq A) \rightarrow (B \cap A = B)$,
   (c) $(A \subseteq B) \rightarrow (A \setminus B = \emptyset)$,
   (d) $(A \subseteq B) \rightarrow (A \cup B = A)$,
   (e) $(B \subseteq A) \rightarrow (A \setminus B \neq \emptyset)$.

Aufgabe Bonus.2

Ein Spiel (leichte Abwandlung des Kartenspiels SET!) wird mit Karten gespielt, auf denen Symbole abgebildet sind. Die Karten haben mehrere Merkmale:
Anzahl (1 bis 3), Farbe (rot, grün,blau), Form (Kreis, Dreieck, Viereck) und Füllung (voll, halb, leer) der Symbole. Jede Merkmalskombination ist auf genau einer Karte abgebildet.

a. Wieviele verschiedene Spielkarten gibt es?

b. Geben Sie eine formale Repräsentation der Menge aller Karten an.

c. Beschreiben Sie die folgenden Mengen formal (intensional):

   K_1: Menge aller roten Karten,
   K_2: Menge aller Karten mit leeren Symbolen,
   K_3: Menge aller Karten mit wenigstens zwei Dreiecken, die nicht blau sind.
   K_4: Menge aller Dreiermengen von Karten mit gleicher Anzahl, Farbe und Form (aber verschiedener Füllung).

Aufgabe Bonus.3

Welche der folgenden Aussagen gelten für alle binären Relationen $R \subseteq M^2$ auf Mengen $M \neq \emptyset$? Begründen Sie Ihre Antworten.

a. Jede asymmetrische Relation ist irreflexiv.
b. Jede irreflexive Relation ist asymmetrisch.
c. Jede antisymmmetrische Relation ist asymmetrisch.
d. Jede transitive irreflexive Relation ist asymmetrisch.

Welche der Aussagen gelten für alle binären Relationen $R \subseteq M^2$ auf der Menge $M = \emptyset$?

Aufgabe Bonus.4

Ein Hundertjähriger berichtet über seine Essgewohnheiten:

- Wenn ich keinen Fisch esse, dann esse ich Eiscreme oder trinke Bier.
- Wenn ich Bier trinke und auf die Eiscreme verzichte, dann esse ich Fisch oder trinke kein Bier.
- Wenn ich dagegen Fisch oder Eiscreme esse, dann trinke ich kein Bier und esse auch keine Eiscreme.

a. Formalisieren Sie jede dieser Aussagen durch eine aussagenlogische Formel (wenn man davon ausgeht, dass er als erfahrener Mann das inklusive oder meint). Geben Sie dabei auch die Bedeutung der dazu verwendeten Aussagevariablen an.

b. Durch welche Diät hat der alten Mann ein so hohes Alter erreicht? Begründen Sie.

Aufgabe Bonus.5

a. Bestimmen Sie für die Relationen $R \subseteq \{a, b, c\}^2$ mit $R = \{aa, ab, ac, bb, cc\}$ und $S \subseteq \{1, 2, 3\}^2$ mit $S = \{12, 13, 23, 31\}$ das komponentenweise Produkt $(R \cdot_k S)$

b. Bestimmen Sie für die Relationen $R \subseteq \{1, 2, 3\}^2$ mit $R = \{12, 13, 23\}$ und $S \subseteq \{a, b\}^2$ mit $S = \{aa, ab, ac, bb, cc\}$ das lexikographische Produkt $(R \cdot_k S)$

Aufgabe Bonus.6

Zeigen Sie, dass das komponentenweise Produkt $(R \cdot_k S)$ zweier

a. Quasiordnungen $R \subseteq M^2$ und $S \subseteq N^2$ eine Quasiordnung ist,

b. Äquivalenzrelationen $R \subseteq M^2$ und $S \subseteq N^2$ eine Äquivalenzrelation ist,

c. Halbordnungen $R \subseteq M^2$ und $S \subseteq N^2$ eine Halbordnung ist,

d. linearer Ordnungen $R \subseteq M^2$ und $S \subseteq N^2$ nicht notwendig eine lineare Ordnung ist.

Aufgabe Bonus.7

Zeigen Sie dass das lexikographische Produkt $(R \cdot_l S)$ zweier linearer Ordnungen $R \subseteq M^2$ und $S \subseteq M^2$ eine lineare Ordnung ist.