8. Übung im Modul „Modellierung“ Wintersemester 2024/25

zu lösen bis 4. Dezember 2024

Aufgabe 8.1

Die folgenden Tabellen enthalten die Relationen L und A.

L (Lieblingsgetränke)

Person	Getränk
Tina	Cola
Tina	Wasser
Paul	Bier
Anna	Rotwein
Anna	Wasser
Klaus	Wasser
Klaus	Weißwein
Anna	Bier
Moni	Eierlikör
Moni	Cola

A (Getränke-Angebot)

Restaurant	Getränk
Seeblick	Wasser
Seeblick	Eierlikör
Talschenke	Bier
Talschenke	Wasser
Berghof	Rotwein
Berghof	Weißwein

Außerdem ist bekannt:

- Paul ist Annas Vater.
- Anna und Klaus sind Tinas Eltern.
- Moni ist die Mutter von Klaus.

Diese Aussagen definieren die Relation E (ist Elternteil von) und die Eigenschaften W (weiblich) und M (männlich).

a. Geben Sie für die Relationen L, A, E, W, M jeweils Stelligkeit und Typ der Relation an.

b. Geben Sie jeweils extensionale Darstellungen und umgangssprachliche Beschreibungen für die folgenden Mengen und Relationen an:

- $L|_{\{\mathsf{Anna},\mathsf{Klaus}\}}$
- $L^{-1}|_{\{\mathsf{Bier},\mathsf{Wasser}\}}$
- $A^{-1}|_{\{\mathsf{Bier},\mathsf{Wasser}\}}$
- $\pi_1(A)$
- $\pi_2\left(L|_{\{\mathsf{Anna},\mathsf{Klaus}\}}\right)$
- E^{-1}
- $L \circ A^{-1}$

c. Stellen Sie die Relation istUrenkelVon durch die Relation E dar.

d. Stellen Sie die Relation sindGeschwister mit Hilfe der Relation E dar. (Achtung: Niemand ist Geschwister von sich selbst. Sie brauchen also eine weitere bekannte Relation.)

Aufgabe 8.2

Zeigen Sie, dass für alle binären Relationen

a. $R \subseteq A \times B$ und $S \subseteq A \times B$ gilt $(R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1}$

b. $R \subseteq A \times B$ und $S \subseteq B \times C$ gilt $(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$

Aufgabe 8.3

a. Geben Sie eine Relation $S \subseteq \{a, b, c, d\}^2$ an, die weder symmetrisch noch asymmetrisch noch antisymmetrisch ist.

b. Geben Sie zwei symmetrische Relationen $R \subseteq M \times M$ und $Q \subseteq M \times M$ auf der Menge $M = \{a, b, c\}$ an, deren Verkettung $R \circ Q$ nicht symmetrisch ist.

Aufgabe 8.4

Lösen Sie die folgenden Aufgaben für die binäre Relation $R \subseteq \{1, 2, 3, 4\}^2$ mit

$R \ = \{(1, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3), (4, 3)\}$

a. Geben Sie die Relation R^{-1} an.
b. Geben Sie die Relation $R \circ R$ an.
c. Geben Sie die Relation $R \circ R \circ R$ an.
d. Geben Sie die Relation $R^{-1} \circ R$ an.
e. Geben Sie die Relation $R \circ R^{-1}$ an.
f. Bestimmen Sie für jede der Relationen $R, R^{-1}, R \circ R$, $R \circ R^{-1}$ und $R^{-1} \circ R$, welche der folgenden Eigenschaften für sie zutreffen, tragen Sie die entsprechenden Wahrheitswerte in die Tabelle ein und begründen Sie Ihre Antworten:

Relation	reflexiv	irreflexiv	transitiv	symmetrisch	asymmetrisch	antisymmetrisch
R						
R^{-1}						
$R \circ R$						
$R \circ R \circ R$						
$R^{-1} \circ R$						
$R \circ R^{-1}$						

Aufgabe 8.5

Bestimmen Sie für die Relation $S \subseteq \{a, b, c, d, e\}^2$ mit

$S = \{(a, a), (a, d), (b, e), (c, a), (d, a)\}$

- die reflexive Hülle,
- die symmetrische Hülle,
- die transitive Hülle.
- die reflexiv-transitive Hülle.

Aufgabe 8.6

Zu jeder Menge M wird die Relation $R_M \subseteq 2^M \times 2^M$ auf der Potenzmenge der Menge M definiert durch $R_M = \{(X, Y) \mid |X| = |Y|\}$.
Für jedes $i \in \mathbb{N}$ ist die Menge $M_i \subseteq \mathbb{N}$ definiert durch $M_i = \{0, \ldots, i\}$.

a. Geben Sie für jedes $i \in \{0, 1, 2\}$ die Menge M_i und die Relation $R_{(M_i)}$ an.
b. Zeigen Sie, dass die Relation $R_{(M_7)}$ für die Menge $M_7 = \{0, \ldots, 7\}$ eine Äquivalenzrelation ist.
c. In wieviele Äquivalenzklassen teilt die Relation $R_{(M_7)}$ die Menge $2^{(M_7)}$?
d. Geben Sie zu jeder Äquivalenzklasse ein Element und die Mächtigkeit der Äquivalenzlasse an.
e. In wieviele Äquivalenzklassen teilt die Relation $R_{(M_n)}$ die Menge $2^{(M_n)}$?
   Geben Sie aus jeder Äquivalenzklasse einen Repräsentanten an.

Aufgabe 8.7

Zeigen Sie, dass die Teilerrelation $a|b$ mit $\forall a, b : (a|b \leftrightarrow \exists c \in M : ac = b)$

- auf der Menge $\mathbb{N}$ eine Halbordnung, aber keine totale Ordnung ist,
- auf der Menge $\mathbb{Z}$ keine Halbordnung ist.

Aufgabe 8.8

Überprüfen Sie jede der folgenden Relationen auf ihre Eigenschaften (reflexiv , irreflexiv , transitiv , symmetrisch , asymmetrisch , antisymmetrisch) und geben Sie an, ob die Relationen Quasiordnungen, Äquivalenzrelationen, Halbordnungen, lineare Ordnungen sind.

a. $R_1 \subseteq \emptyset^2$ mit $R_1 = \emptyset$

b. $R_2 \subseteq \{a,b,c\}^2$ mit $R_2 = \{a,b,c\}^2$

c. $R_3 \subseteq (\{a,b\}^*)^2$ mit $R_3 = \{(u,v) \in (\{a\}^*)^2 \mid u \sqsubseteq v\}$

d. $R_4 \subseteq (\{a\}^*)^2$ mit $R_4 = \{(u,v) \in (\{a\}^*)^2 \mid |u| = |v|\}$

e. $R_5 \subseteq \{0,\dots,12\}^2$ mit $R_5 = \{(a,b) \in \{0,\dots,12\}^2 \mid \ a|b\}$

f. $R_6 \subseteq (\{a,b\}^+)^2$ mit $R_6 = \{(u,v) \in (\{a,b\}^+)^2 \mid u_1 = v_1\}$

g. $R_7 \subseteq (\{a,b\}^*)^2$ mit $R_7 = \{(u,v) \in (\{a,b\}^*)^2 \mid |u| \leq |v|\}$

h. $R_8 \subseteq \{1,2,3,4\}^2$ mit $R_8 = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$

i. $R_9 \subseteq \{1,2,3,4\}^2$ mit $R_9 = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,3),(3,2),(4,4)\}$

j. $R_{10} \subseteq \{1,2,3,4\}^2$ mit $R_{10} = \{(1,1),(1,2),(2,3),(1,3),(4,4)\}$

Tragen Sie als Lösung die entsprechenden Wahrheitwerte (0 oder 1) in die folgende Tabelle ein und begründen Sie Ihre Antworten.

Eigenschaft	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	R_6	R_7	R_8	R_9	R_{10}
reflexiv										
irreflexiv										
transitiv										
symmetrisch										
asymmetrisch										
antisymmetrisch										
Quasiordnung										
Äquivalenzrelation										
Halbordnung										
lineare Ordnung										

Aufgabe 8.9

Auf der Potenzmenge der Menge $M = \{0,1,2\}$ ist die zweistellige Relation $R \subseteq 2^M \times 2^M$ definiert durch $R = \{(X,Y) \mid X \cap Y = \emptyset\}$.

a. Geben Sie eine umgangssprachliche Beschreibung der Relation R an.

b. Geben Sie eine extensionale Darstellung der Relation R (durch Angabe aller ihrer Elemente) an.

c. Geben Sie eine umgangssprachliche Beschreibung und eine extensionale Darstellung für das Komplement $\overline{R}$ der Relation R an.

d. Welche der Eigenschaften reflexiv, irreflexiv, transitiv, symmetrisch, asymmetrisch, antisymmetrisch haben R und $\overline{R}$?

e. Gilt $I_{2^M} \subseteq R$? Gilt $I_{2^M} \subseteq \overline{R}$?