6. Übung im Modul „Modellierung“ Wintersemester 2024/25
zu lösen bis 20. November 2024

Aufgabe 6.1

Welche der folgenden Aussagen gelten für die Menge $M = 2^{\{0,1\}} \cup \{0\}$?
Begründen Sie Ihre Antworten.

a. $\emptyset \in M$
b. $\emptyset \subseteq M$
c. $\{\emptyset\} \in M$
d. $\{\emptyset\} \subseteq M$
e. $0 \in M$
f. $0 \subseteq M$
g. $\{0\} \in M$
h. $\{0\} \subseteq M$
i. $\{\{0\}\} \subseteq M$
j. $\{\{0,1\}\} \in M$
k. $\{0, \{1\}\} \subseteq M$
l. $\{\{0\}, \{1\}\} \subseteq M$

Aufgabe 6.2

Formulieren Sie die folgenden Mengen umgangssprachlich:

$$\begin{aligned}
M_1 &= \{3n \mid (n \in \mathbb{N}) \wedge (n < 5)\} \\
M_2 &= \{p \in \mathbb{N} \mid (3p < 20)\} \\
M_3 &= \{(i,j) \mid (i \in \mathbb{R}) \wedge (j \in \mathbb{R}) \wedge (i - j \geq 0)\} \\
M_4 &= \{(x,y) \mid (x \in \mathbb{N}) \wedge (y \in \mathbb{N}) \wedge (y = x^2)\} \\
M_5 &= M_3 \cap M_4
\end{aligned}$$

und geben Sie auch die extensionalen Darstellungen aller endlichen Mengen M_i an.

Aufgabe 6.3

a. Geben Sie zu jeder der folgenden informal beschriebenen Mengen formale intensionale Darstellungen an:

   M_1 : Menge aller Quadratzahlen natürlicher Zahlen, die kleiner als 50 sind,
   M_2 : Menge aller ungeraden Zahlen zwischen 10 und 20,
   M_3 : Menge aller dreistelligen Dezimaldarstellungen natürlicher Zahlen ohne führende Nullen,
   M_4 : Menge aller vollständigen 3-Gänge-Menüs, die sich zusammenstellen lassen aus
   - Vorspeisen: Suppe
   - Hauptgängen: Fisch, Huhn, Tofu
   - Dessert: Eis, Pudding

   M_5 : Menge aller möglichen Getränke, die sich aus (je höchstens einem Anteil) Anannassaft, Baileys, Cola, Orangensaft, Rum und Wodka mixen lassen.

b. Geben Sie für jede endliche Menge die Mächtigkeit $|M_i|$ an.

c. Geben Sie für jede dieser Mengen mit $|M_i| \leq 10$, auch die extensionale Darstellung und für $|M_i| > 10$ drei Elemente der Menge an.

Aufgabe 6.4

Zeigen Sie mit Hilfe der Definitionen der Mengenoperationen, dass die Gleichungen

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \tag{1}$$
$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C) \tag{2}$$

a. für die Mengen $A = \{a, b\}$, $B = \{a, c, d\}$ und $C = \{b, c\}$ gelten,

b. für alle Mengen A, B und C gelten.

Aufgabe 6.5

Bestimmen Sie für die gegebenen Mengen $A = \{a, b\}$, $B = \{a, c, d\}$ und $C = \{1, 3, 4\}$:

$$
\begin{aligned}
M_1 &= \{x \in C \mid x > 2\} & M_7 &= 2^B \\
M_2 &= A \cup B & M_8 &= 2^{\left(2^A\right)} \\
M_3 &= A \cap B & M_9 &= M_5 \cap M_7 \\
M_4 &= A \times \{\alpha\} & M_{10} &= \left(2^B \setminus 2^A\right) \cup B \\
M_5 &= A \times B & M_{11} &= A \dot\cup B \\
M_6 &= M_1 \times A & M_{12} &= A \dot\cup 2^A
\end{aligned}
$$

und geben Sie jeweils $|M_i|$ an.

Aufgabe 6.6

Zeigen Sie, dass die Aussage $\quad M \subseteq N \;\rightarrow\; 2^M \subseteq 2^N$

a. für die Mengen $M = \{a, c\}$ und $N = \{a, b, c\}$ gilt,

b. für alle Mengen M und N gilt.

Dazu benötigen Sie die Definitionen der Potenzmenge und der Beziehung $\subseteq$.

Aufgabe 6.7

Welche der folgenden Mengenfamilien sind disjunkte Zerlegungen der Vereinigung M aller Mengen der Familie?
Geben Sie auch die Menge M an. Begründen Sie Ihre Antworten.

a. $\{K_\diamondsuit, K_\heartsuit, K_\spadesuit, K_\clubsuit\}$, wobei für jede Farbe $f \in \{\diamondsuit, \heartsuit, \spadesuit, \clubsuit\}$ die Menge K_f alle Skatkarten der Farbe f enthält,

b. $\{A_0, A_1, A_2 \ldots\}$, wobei für jedes $n \in \mathbb{N}$: A_n = Menge aller Fahrzeuge mit erreichbarer Höchstgeschwindigkeit von mindestens n km/h,

c. $\{M_0, M_1, M_2, \ldots\}$, wobei für jedes $i \in \mathbb{N}$:
M_i = Menge aller Personen, die genau i Paar Schuhe besitzen,

d. $\{4\mathbb{N}, 4\mathbb{N}+1, 4\mathbb{N}+2, 4\mathbb{N}+3\}$

e. $\{[-i, i) \subseteq \mathbb{R} \mid i \in \mathbb{N}\}$

f. $\{\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y \leq 0\}, \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y \geq 1\}\}$