4. Übung im Modul „Modellierung“ Wintersemester 2024/25
zu lösen bis 6. November 2024

Aufgabe 4.1

Transformieren Sie die folgenden Formeln φ_i jeweils in

a. eine äquivalente Formel in DNF,
b. eine äquivalente Formel in CNF.

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= \neg((p \to (q \land \neg r)) \leftrightarrow (\neg p \lor (q \land r)))\\ \varphi_2 &= (p \to q) \to ((p \to \neg q) \to \neg p)\end{aligned}$$

Aufgabe 4.2

a. Finden Sie eine aussagenlogische Formel $\varphi \in \mathsf{AL}(\{p, q, r\})$ und
b. eine aussagenlogische Formel $\psi \in \mathsf{AL}(\{p, q, r\})$ in CNF

mit der Modellmenge $\mathsf{Mod}(\varphi) = \mathsf{Mod}(\psi) = \{W_{011}, W_{100}, W_{101}, W_{111}\}$.

Aufgabe 4.3

a. Geben Sie für $P = \{p, q, r, s\}$ eine aussagenlogische Formel $\varphi \in \mathsf{AL}(P)$ an, die genau von allen Belegungen erfüllt wird, unter denen mindestens zwei der Atome falsch sind.
b. Geben Sie zu eine zu dieser Formel äquivalente Formel $\psi \in \mathsf{AL}(P)$ in DNF an.
c. Geben Sie zu eine zu dieser Formel äquivalente Formel $\eta \in \mathsf{AL}(P)$ in CNF an.

Aufgabe 4.4

In dieser Aufgabe geht es um aussagenlogische Formeln $\varphi \in \mathsf{AL}(P)$, in denen ausschließlich Aussagenvariablen und Junktoren aus der Menge $\{\lor, \land\}$ vorkommen.

a. Definieren Sie die Menge $\mathsf{AL}_{\{\lor,\land\}}(P)$ dieser eingeschränkten Formeln induktiv.
(Diese Menge ist für jede nichtleere Menge P unendlich.)

b. Geben Sie drei Formeln $\varphi, \psi, \eta \in \mathsf{AL}_{\{\lor,\land\}}(\{p, q, r\})$ an mit $\mathrm{size}(\varphi) = 1$, $\mathrm{size}(\psi) = 5$ und $\mathrm{size}(\eta) = 11$.

c. Geben Sie zu jeder Menge P von Aussagenvariablen eine Belegung $W : P \to \{0, 1\}$ an, die *jede* Formel $\varphi \in \mathsf{AL}_{\{\lor,\land\}}(P)$ erfüllt.

d. Weisen Sie mit Hilfe dieser Belegung W durch strukturelle Induktion nach, dass jede Formel in $\varphi \in \mathsf{AL}_{\{\lor,\land\}}(P)$ erfüllbar ist.

Aufgabe 4.5

Zeigen Sie, dass für je zwei beliebige Formeln $\varphi, \psi \in \mathsf{AL}(P)$ genau dann $\varphi \equiv \psi$ gilt, wenn die Formel $\varphi \leftrightarrow \psi$ allgemeingültig ist.