13. Übung im Modul „Modellierung" Wintersemester 2024/25

zu lösen bis 22. Januar 2025

Aufgabe 13.1

Gegeben sind die Signatur $\Sigma = (\Sigma_F, \Sigma_R)$ mit $\Sigma_F = \{(a,0),(f,2)\}$, $\Sigma_R = \{(E,1),(R,2)\}$ und die Variablenmenge $\mathbb{X} = \{x,y,z\}$.
Geben Sie für alle Zeichenketten in der ersten Spalte der Tabelle an (Wahrheitswerte 0, 1), ob es sich um korrekt geformte Terme oder prädikatenlogische Formeln handelt. Falls dies der Fall ist, geben Sie die Mengen der im Term oder in der Formel gebunden bzw. frei vorkommenden Variablen an.

Zeichenkette	Term	Formel	unkorrekt	freie Variablen	gebundene Var.
$f(a,x)$					
$E(f)$					
$\forall x\ (R(a,x) \vee E(f(x,y)))$					
$R(x, f(y,z))$					
$x \wedge f(y,a)$					
$R(x,z) \vee \forall x\ \neg R(x,y)$					
$\forall x(\neg R(x,y) \vee f(a, \neg E(f(x,y))))$					

Aufgabe 13.2

Gegeben sind die Signatur $\Sigma = (\Sigma_F, \Sigma_R)$ mit $\Sigma_F = \{(a,0),(f,2)\}$, $\Sigma_R = \{(E,1),(R,2)\}$, die Variablenmenge $\mathbb{X} = \{x,y,z\}$ und die Σ-Strukturen

$$\mathcal{A} = (A, [\![\cdot]\!]_\mathcal{A}) \text{ mit } A = 2^{\{0,1,2\}}$$

$$\begin{aligned}
[\![a]\!]_\mathcal{A} &= \{0\} \\
\text{für alle } M,N \in 2^{\{0,1,2\}} \text{ gilt: } [\![f]\!]_\mathcal{A}(M,N) &= M \cap N \\
[\![E]\!]_\mathcal{A} &= \{\emptyset\}, \\
[\![R]\!]_\mathcal{A} &= \{(M,N) \mid M,N \in 2^{\{0,1,2\}} \text{ und } |M| = |N|\}
\end{aligned}$$

$$\mathcal{B} = (B, [\![\cdot]\!]_\mathcal{B}) \text{ mit } B = \mathbb{Z} \text{ und}$$

$$\begin{aligned}
[\![a]\!]_\mathcal{B} &= 2 \\
\text{für alle } m,n \in \mathbb{Z} \text{ gilt: } [\![f]\!]_\mathcal{B}(m,n) &= m+n \\
[\![E]\!]_\mathcal{B} &= \mathbb{P} \quad \text{(Menge aller Primzahlen)} \\
[\![R]\!]_\mathcal{B} &= \{(m,n) \mid m|n\} \quad \text{(Teilerrelation } |)
\end{aligned}$$

Die Belegung $\alpha : \mathbb{X} \to 2^{\{0,1,2\}}$ ist die Abbildung mit $\alpha(x) = \emptyset, \alpha(y) = \{0,1,2\}$ und $\alpha(z) = \{1,2\}$.
Die Belegung $\beta : \mathbb{X} \to \mathbb{Z}$ ist die Abbildung mit $\beta(x) = 0, \beta(y) = 1$ und $\beta(z) = 2$.
Tragen Sie für jede Zeichenkette in der linken Spalte der folgenden Tabelle ihren Wert in den Interpretationen $(\mathcal{A}, \alpha)$ und $(\mathcal{B}, \beta)$ in die Tabelle ein.

Zeichenkette s	$[\![s]\!]_{(\mathcal{A},\alpha)}$	$[\![s]\!]_{(\mathcal{B},\beta)}$
$f(a, f(a,x))$		
$E(f(x,a))$		
$\forall x\ \forall y\ ((E(x) \wedge R(x,y)) \to E(y))$		
$E(f(x,y)) \leftrightarrow R(x, f(y,x))$		
$\forall x\ \forall y\ \ (R(x,a) \wedge R(y,a) \to R(f(x,y),a))$		
$\forall y\ \forall z\ \ (R(x,z) \wedge R(y,z) \to R(f(x,y),z))$		
$\forall y\ \forall z\ (\neg(\neg(R(x,y) \wedge R(x,z))) \vee R(x, f(y,z)))$		

Aufgabe 13.3

Drücken Sie die Aussage der Formel $\forall x\,(P(x) \vee \exists y\,(P(y) \wedge R(x,y)))$ in den folgenden Strukturen umgangssprachlich aus:

a. $\mathcal{A} = (\mathbb{N}, [\![\cdot]\!]_{\mathcal{A}})$ mit $[\![P]\!]_{\mathcal{A}} = \{0\}$ und $[\![R]\!]_{\mathcal{A}} = \{(x,y) \in \mathbb{N}^2 \mid x > y\}$.

b. $\mathcal{B} = (\mathbb{N}, [\![\cdot]\!]_{\mathcal{B}})$ mit $[\![P]\!]_{\mathcal{B}} = \{x \in \mathbb{N} \mid 3|x\}$ und $[\![R]\!]_{\mathcal{B}} = \{(x,y) \in \mathbb{N}^2 \mid |x-y| \leq 1\}$.

c. $\mathcal{C} = (C, [\![\cdot]\!]_{\mathcal{C}})$ mit $C =$ Menge aller Studenten aus 24MIB, $x \in [\![P]\!]_{\mathcal{C}}$ gdw. x wenigstens eine Aufgabe der Bonusserie gelöst hat und $(x,y) \in [\![R]\!]_{\mathcal{C}}$ gdw. x morgens später als y aufsteht.

Aufgabe 13.4

Welche der folgenden Strukturen erfüllen die Formel

$\varphi = \exists x P(x) \wedge \exists x (Q(x) \wedge \neg P(x)) \wedge \exists x \forall y (R(x,y) \rightarrow (Q(x) \leftrightarrow \neg Q(y)))$

a. $\mathcal{A} = (\{a,b\}, [\![\cdot]\!]_{\mathcal{A}})$ mit $[\![P]\!]_{\mathcal{A}} = \{a\}$, $[\![Q]\!]_{\mathcal{A}} = \{b\}$, $[\![R]\!]_{\mathcal{A}} = \{(a,b),(b,a)\}$,

b. $\mathcal{B} = (\mathbb{N}, [\![\cdot]\!]_{\mathcal{B}})$ mit $[\![P]\!]_{\mathcal{B}} = \{0\}$, $[\![Q]\!]_{\mathcal{B}} = 2\mathbb{N}$, $[\![R]\!]_{\mathcal{B}} = \{(n, n+1) \mid n \in \mathbb{N}\}$,

c. $\mathcal{C} = (2^{\{a,b,c\}}, [\![\cdot]\!]_{\mathcal{C}})$ mit $[\![P]\!]_{\mathcal{C}} = \{\{a,b\}\}$, $[\![Q]\!]_{\mathcal{C}} = \{\emptyset, \{b\}\}$, $[\![R]\!]_{\mathcal{C}} = \{(M,N) \mid M \subseteq N\}$

d. $\mathcal{D} = (\{a,b,c\}^*, [\![\cdot]\!]_{\mathcal{D}})$ mit $[\![P]\!]_{\mathcal{D}} = \{w \in \{a,b,c\}^* \mid w_1 = a\}$,
$[\![Q]\!]_{\mathcal{D}} = \{w \in \{a,b\}^* \mid |w| = 3\}$, $[\![R]\!]_{\mathcal{D}} = \left\{(u,v) \in (\{a,b,c\}^*)^2 \mid u \sqsubseteq v\right\}$

Begründen sie Ihre Antworten.

Aufgabe 13.5

Geben Sie für die prädikatenlogische Formel $\varphi = \forall x \exists y\ (P(x,y) \wedge \neg P(y,x))$

a. eine Struktur $\mathcal{A} = (A, [\![\cdot]\!]_{\mathcal{A}}) \in \mathsf{Mod}(\varphi)$ mit dem Universum $A = \{a,b,c\}$ an,

b. eine Struktur $\mathcal{B} = (B, [\![\cdot]\!]_{\mathcal{B}}) \notin \mathsf{Mod}(\varphi)$ mit einem endlichen Universum B an,

c. eine Struktur $\mathcal{C} = (C, [\![\cdot]\!]_{\mathcal{C}}) \in \mathsf{Mod}(\varphi)$ mit einem unendlichen Universum C an,

d. eine Struktur $\mathcal{D} = (D, [\![\cdot]\!]_{\mathcal{D}}) \notin \mathsf{Mod}(\varphi)$ mit einem unendlichen Universum D an.

Weisen Sie für jede Struktur nach, dass sie die Anforderungen erfüllt.

Aufgabe 13.6

Geben Sie für die Formelmenge

$$\Phi = \left\{ \begin{array}{l} \forall x \exists y E(x,y) \\ \forall x\ \neg E(x,x) \\ \forall x \forall y\ (E(x,y) \rightarrow E(y,x)) \\ \forall x \forall y\ (E(x,y) \rightarrow ((R(x) \wedge B(y)) \vee (B(x) \wedge R(y)))) \end{array} \right\}$$

a. eine endliche Struktur $\mathcal{A} = (A, [\![\cdot]\!]_{\mathcal{A}})$ an, die Φ erfüllt,

b. eine unendliche Struktur $\mathcal{B} = (B, [\![\cdot]\!]_{\mathcal{B}})$ an, die Φ erfüllt und

c. eine Struktur $\mathcal{C}$ an, die Φ nicht erfüllt.

d. Hat die Formelmenge Φ ein Modell mit einem Universum aus genau drei Elementen?

(Begründungen nicht vergessen.)

Aufgabe 13.7

Geben Sie für jede der folgenden Teilaufgaben einen erfüllbaren Satz $\varphi_i \in \mathsf{FOL}(\Sigma_i)$ über der jeweils gegebenen Signatur Σ_i an, so dass für alle Σ_i-Strukturen $\mathcal{S} = (S, [\![\cdot]\!]_{\mathcal{S}}) \in \mathsf{Mod}(\varphi_i)$ gilt

a. $|S| \geq 3$ mit $\Sigma_1 = (\emptyset, \Sigma_{R_1})$ mit $\Sigma_{R_1} = \{(=, 2)\}$

b. $|S| \geq 3$ mit $\Sigma_2 = (\emptyset, \Sigma_{R_2})$ mit $\Sigma_{R_2} = \{(P, 1), (Q, 1)\}$

c. $|S| \geq 3$ mit $\Sigma_3 = (\emptyset, \Sigma_{R_3})$ mit $\Sigma_{R_3} = \{(R, 2))\}$

d. $|S| \leq 3$ mit Σ_1

e. $|S| = 3$ mit einer beliebigen Signatur Σ

Aufgabe 13.8

Mit den Symbolen der Signatur $\Sigma = (\Sigma_F, \Sigma_R)$ mit $\Sigma_F = \emptyset$ und $\Sigma_R = \{(E, 2), (=, 2)\}$ lassen sich Eigenschaften gerichteter und ungerichteter Graphen beschreiben. E repräsentiert die Kantenrelation und $=$ die Identität der Knoten des Graphen.
Geben Sie für jede der folgenden Mengen von Graphen einen Satz aus $\mathsf{FOL}(\Sigma, \mathbb{X})$ mit einer geeigneten Menge $\mathbb{X}$ an, für welche genau alle Graphen dieser Mengen Modelle sind:

a. Menge aller Graphen ohne Kanten,

b. Menge aller ungerichteten Graphen ohne Schlingen,

c. Menge aller vollständigen ungerichteten Graphen ohne Schlingen,

d. Menge aller gerichteten Graphen mit wenigstens drei Knoten,

e. Menge aller ungerichteten schlingenfreien Graphen, die einen C_3 als Teilgraphen enthalten,

f. Menge aller ungerichteten schlingenfreien Graphen, die eine Clique der Größe 4 als Teilgraphen enthalten,

g. Menge aller ungerichteten schlingenfreien Graphen, die einen P_4 als induzierten Teilgraphen enthalten.