12. Übung im Modul „Modellierung“ Wintersemester 2024/25
zu lösen bis 15. Januar 2025

Aufgabe 12.1

Gegeben ist die Signatur $\Sigma_F = \{(c,0),(a,1),(b,1),(f,2)\}$.
Bestimmen Sie die Werte der folgenden Σ_F-Grundterme

$$\begin{aligned} r &= a(b(b(c))) \\ s &= f(a(b(b(c))), b(a(a(c)))) \\ t &= f(c, f(a(c), f(f(a(c), b(c)), c))) \\ u &= f(f(b(a(c)), c), f(a(c), f(b(c), a(c)))) \end{aligned}$$

in jeder der Σ_F-Strukturen

- $\mathcal{A} = (A, [\![\cdot]\!]_{\mathcal{A}})$ mit

$$\begin{aligned} A &= \{0,1\} \\ [\![c]\!]_{\mathcal{A}} &= 0 \\ \forall d \in A : [\![a]\!]_{\mathcal{A}}(d) &= 1-d \\ \forall d \in A : [\![b]\!]_{\mathcal{A}}(d) &= d \\ \forall d,e \in A : [\![f]\!]_{\mathcal{A}}(d,e) &= |d-e| \text{ (Betrag)} \end{aligned}$$

- $\mathcal{B} = (B, [\![\cdot]\!]_{\mathcal{B}})$ mit

$$\begin{aligned} B &= \{a,b\}^* \quad \text{(Menge aller Wörter über dem Alphabet } \{a,b\}) \\ [\![c]\!]_{\mathcal{B}} &= \varepsilon \\ \forall u \in B : [\![a]\!]_{\mathcal{B}}(u) &= u \circ a \quad (a \text{ an das Wort } u \text{ anhängen}) \\ \forall u \in B : [\![b]\!]_{\mathcal{B}}(u) &= u \circ b \\ \forall u,v \in B : [\![f]\!]_{\mathcal{B}}(u,v) &= u \circ v \end{aligned}$$

Aufgabe 12.2

a. Warum gilt für alle Signaturen Σ_F ohne Konstantensymbole $\mathsf{Term}(\Sigma_F, \emptyset) = \emptyset$?

b. Zeigen Sie, dass für jede Σ_F-Struktur $\mathcal{A}$ die Relation $\equiv_{\mathcal{A}}$ eine Äquivalenzrelation auf der Menge $\mathsf{Term}(\Sigma_F, \emptyset)$ ist.

Aufgabe 12.3

Geben Sie für die Signatur $\Sigma = (\Sigma_F, \emptyset)$ mit $\Sigma_F = \{(a,0),(b,0),(c,1),(d,2),(e,2)\}$ und die Σ_F-Grundterme

$s = c(d(a,b)) \quad t = e(c(a), c(c(a)))$

zwei Σ-Strukturen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ an, welche die beiden folgenden Bedingungen erfüllen:

1. $[\![s]\!]_{\mathcal{A}} = [\![t]\!]_{\mathcal{A}}$ und
2. $[\![s]\!]_{\mathcal{B}} \neq [\![t]\!]_{\mathcal{B}}$

Zeichen Sie die Termbäume der Terme s und t und weisen Sie nach, dass Ihre Strukturen beide Bedingungen 1. und 2. erfüllen.

Aufgabe 12.4

Geben Sie zur Signatur $\Sigma = (\Sigma_R, \Sigma_F)$ mit $\Sigma_R = \{(R, 2)\}$ und $\Sigma_F = \{(f, 1), (g, 2)\}$ zwei Σ-Strukturen $\mathcal{S}_1 = (S_1, [\![\cdot]\!]_{\mathcal{S}_1})$ und $\mathcal{S}_2 = (S_2, [\![\cdot]\!]_{\mathcal{S}_2})$ mit Trägermengen verschiedener Mächtigkeit an, in denen für alle Elemente x, y, z der jeweiligen Trägermengen **alle** folgenden Bedingungen erfüllt sind:

a. $\forall x \in S_i : [\![f]\!]_{\mathcal{S}_i}(x) \neq x$ und $\forall x \in S_i : [\![f]\!]_{\mathcal{S}_i}([\![f]\!]_{\mathcal{S}_i}(x)) = x$

b. $\forall (x, y) \in S_i^2 : [\![g]\!]_{\mathcal{S}_i}(x, y) = [\![g]\!]_{\mathcal{S}_i}(y, x)$

c. $[\![R]\!]_{\mathcal{S}_i}$ ist eine Halbordnung, aber keine lineare Ordnung.

d. Für alle $(x, y) \in [\![R]\!]_{\mathcal{S}_i}$ gilt $([\![f]\!]_{\mathcal{S}_i}(y), [\![f]\!]_{\mathcal{S}_i}(x)) \in [\![R]\!]_{\mathcal{S}_i}$ und $([\![g]\!]_{\mathcal{S}_i}(x, z), [\![g]\!]_{\mathcal{S}_i}(y, z)) \in [\![R]\!]_{\mathcal{S}_i}$.

Weisen Sie nach, dass beide von Ihnen angegebenen Strukturen alle Bedingungen erfüllen.

Aufgabe 12.5

Gegeben sind die Signatur Σ_F und die Struktur $\mathcal{A}$ aus der ersten Aufgabe dieser Serie,
die Variablenmenge $\mathbb{X} = \{x, y\}$,
die Terme $s = f(a(y), f(x, c))$ und $t = f(f(a(x), b(y)), x)$ und
die Belegung $\alpha : \{x, y\} \to A$ mit $\alpha(x) = 0$ und $\alpha(y) = 1$.

a. Bestimmen Sie die Werte der Terme s und t in der Interpretation $(\mathcal{A}, \alpha)$.

b. Finden Sie eine Belegung $\beta : \{x, y\} \to A$ mit den folgenden Eigenschaften:

   (a) $[\![s]\!]_{(\mathcal{A},\alpha)} = [\![s]\!]_{(\mathcal{A},\beta)}$

   (b) $[\![t]\!]_{(\mathcal{A},\alpha)} \neq [\![t]\!]_{(\mathcal{A},\beta)}$

   Weisen Sie nach, dass die von Ihnen angegebene Belegung diese beiden Eigenschaften erfüllt.

Aufgabe 12.6

a. Zeigen Sie, dass die Struktur $\left(2^{(A^*)}, \cup, \circ\right)$ ein Halbring ist.

b. Hat dieser Halbring ein 0-Element? Hat dieser Halbring ein 1-Element? Begründen Sie.
   Falls ja, geben Sie diese Elemente an.