

**11. Übung im Modul „Modellierung“**

Wintersemester 2024/25

zu lösen bis 8. Januar 2025

---

**Aufgabe 11.1**

Für jede Zahl  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n \geq 2$  existieren zwei nicht zueinander isomorphe Graphen  $G_n = (V, E)$  und  $G'_n = (V, E')$  mit  $|V| = n$ , in denen genau zwei Knoten denselben Grad und alle anderen Knoten davon und voneinander verschiedene Grade haben.

- Zeigen Sie, dass jeder endliche Graph  $G = (V, E)$  mit  $|V| \geq 2$  zwei Knoten mit demselben Grad enthält.
- Geben Sie für jedes  $n \in \{2, 3, 4, 5\}$  zwei solche Graphen  $G_n$  und  $G'_n$  an.
- Geben Sie ein Verfahren an, durch die sich für jedes  $n \in \mathbb{N}$  ein solches Paar von Graphen konstruieren lässt. Überlegen Sie dazu,
  - welcher Zusammenhang zwischen  $G_n$  und  $G'_n$  besteht und
  - wie sich  $G_{n+1}$  und  $G'_{n+1}$  aus den Graphen  $G_n$  und  $G'_n$  konstruieren lassen.

**Aufgabe 11.2**

Zeigen Sie, dass die folgenden Relationen Halbordnungen auf der Menge aller endlichen Graphen sind:

- Teilgraph
- induzierter Teilgraph
- aufspannender Teilgraph

**Aufgabe 11.3**

Für jede Zahl  $n \in \mathbb{N}$  ist der Graph  $Q_n = (V, E)$  definiert durch  $V = \{0, 1\}^n$  und  $E = \left\{ \{u, v\} \in \binom{V}{2} \mid \exists i (i \in \{1, \dots, n\} \wedge (u_i \neq v_i) \wedge \forall j ((j \in \{1, \dots, n\} \wedge (j \neq i)) \rightarrow (u_j = v_j))) \right\}$ . Beantworten Sie die folgenden Fragen und begründen Sie Ihre Antworten.

- Wieviele Ecken und Kanten haben die Graphen  $Q_n$ ?
- Geben Sie die Multimenge der in  $Q_n$  vorkommenden Eckengrade an.
- Zeichnen Sie für alle  $n \leq 4$  den Graphen  $Q_n$ .
- Für welche  $n$  existiert ein geschlossener Eulerweg im Graphen  $Q_n$ ?
- Für welche  $n$  existiert ein Hamiltonkreis im Graphen  $Q_n$ ?
- Für welche  $n$  ist der Graph  $Q_n$  bipartit?
- Bestimmen Sie die chromatische Zahl von  $Q_n$ .

**Aufgabe 11.4**

Lösen Sie die Aufgabe 5.3 aus

Uwe Kastens, Hans Kleine Büning: Modellierung - Grundlagen und formale Methoden.

**Aufgabe 11.5**

Lösen Sie die Aufgabe 5.6

Uwe Kastens, Hans Kleine Büning: Modellierung - Grundlagen und formale Methoden.

## Aufgabe 11.6

Der *Kantengraph* eines Graphen  $G = (V, E)$  ist der Graph  $G' = (E, E')$  mit  $E' = \left\{ \{x, y\} \in \binom{E}{2} \mid x \cap y \neq \emptyset \right\}$ .

Wir betrachten die Kantengraphen der Graphen  $P_4$ ,  $C_4$  und  $K_4$ .

- Geben Sie für die Diagramme der Kantengraphen an.
- Lösen Sie alle Teilaufgaben der Aufgabe 10.2 für diese Kantengraphen.

## Aufgabe 11.7

Geben Sie für jeden der folgenden umgangssprachlich beschriebenen Sachverhalte an:

- O: die Menge der Individuen, um die es geht,  
E: alle relevanten Eigenschaften der Individuen,  
B: alle relevanten Beziehungen zwischen den Individuen,  
F: alle relevanten Funktionen auf der Menge der Individuen,  
 $\varphi$ : eine prädikatenlogische Formel, die den Sachverhalt beschreibt.
- Cousins einer Person sind alle männlichen Kinder von Geschwistern der Eltern dieser Person.
  - Das Quadrat jeder ungeraden Primzahl ist ungerade.
  - Zwischen 13 und 17 gibt es keine durch 10 teilbare natürliche Zahl.
  - Jeder Unter sticht alle Karten, die keine Unter sind.
  - Alle Punkte auf einem Kreis haben denselben Abstand zum Mittelpunkt des Kreises.

## Aufgabe 11.8

Gegeben sind die Signatur  $\Sigma_F = \{(c, 0), (a, 1), (b, 1), (f, 2)\}$  und die Zeichenketten

$$t_1 = a(b(c)) \quad t_2 = c(b(a(x))) \quad t_3 = a(f(a, f(x, b(c)))) \quad t_4 = f(b(f(x, b(a(c))))), b(y(c)))$$

- Welche dieser Zeichenketten sind  $\Sigma_F$ -Terme, welche sind  $\Sigma_F$ -Grundterme:
- Geben Sie für jeden der  $\Sigma_F$ -Terme  $t_i$  seine Größe  $\text{size}(t_i)$  und die Menge der in ihm vorkommenden Variablen  $\text{var}(t_i)$  an.