

7. Übung zu Theoretische Informatik: Automaten und formale Sprachen

Sommersemester 2025

zu lösen bis 27. Mai 2025

Aufgabe 7.1:

- a. Geben Sie ein (möglichst einfaches) Verfahren zur Konstruktion eines vollständigen DFA C mit $L(C) = L(A) \Delta L(B)$ aus zwei gegebenen NFA A und B an.

Hinweis: Das ist mit dem Produktautomaten möglich.

Zeigen Sie, dass der so konstruierte NFA C die Anforderung erfüllt.

- b. Demonstrieren Sie Ihr Verfahren an den NFA

$A = (\{a, b\}, \{0, 1\}, \delta_A, \{0\}, \{1\})$ mit $\delta_A(a) = \{(0, 1), (1, 0)\}$ und $\delta_A(b) = \{(0, 0), (1, 1)\}$
 und $B = (\{a, b\}, \{0, 1, 2\}, \delta_B, \{0\}, \{1\})$ mit $\delta_B(a) = \{(0, 2), (1, 0), (2, 1)\}$ und
 $\delta_B(b) = \{(0, 1), (1, 2), (2, 0)\}$.

Geben Sie auch die Sprachen $L(A)$, $L(B)$ und $L(A) \Delta L(B)$ an.**Aufgabe 7.2:**Bestimmen Sie für die Sprachen $L_1 = \{w \in \{a, b\}^* \mid |w| \in 2\mathbb{N}\}$ und $L_2 = \{w \in \{a, b\}^* \mid w_1 = w_{|w|}\}$:

- a. NFA A, B, C, D mit $L(A) = L_1, L(B) = L_2, L(C) = L_1 \cap L_2, L(D) = L_1 \circ L_2$,
 b. vollständige DFA A', B', C', D' mit $L(A') = L_1, L(B') = L_2, L(C') = L_1 \cap L_2, L(D') = L_1 \circ L_2$,
 c. reguläre Ausdrücke E, F, G, H mit $L(E) = L_1, L(F) = L_2, L(G) = L_1 \cap L_2, L(H) = L_1 \circ L_2$.

Aufgabe 7.3:

Gegeben ist der ε -NFA $A = (\{a, b\}, \{0, 1, 2, 3, 4\}, \delta, \{0\}, \{4\})$ mit
 $\delta(a) = \{(0, 1), (3, 4)\}$, $\delta(b) = \{(1, 2), (2, 3)\}$ und $\delta(\varepsilon) = \{(1, 3), (3, 1), (4, 1)\}$.

- a. Welche Sprache akzeptiert dieser ε -NFA?
 b. Konstruieren Sie einen zu A äquivalenten NFA.
 c. Konstruieren Sie einen zu A äquivalenten DFA.
 d. Konstruieren Sie einen NFA, der die Sprache $\overline{L(A)}$ akzeptiert.
 e. Konstruieren Sie einen NFA, der die Sprache $L(A)^*$ akzeptiert.

Aufgabe 7.4:

- a. Geben Sie ein Verfahren an, wie sich zu *jedem* beliebigen NFA $A = (X, Q, \delta, I, F)$ mit $I \cap F = \emptyset$ ein äquivalenter NFA B (d.h. ohne ε -Übergänge) mit genau einem Start- und genau einem akzeptierenden Zustand konstruieren lässt.
 b. Konstruieren Sie mit diesem Verfahren einen zum NFA
 $A = (\{a, b\}, \{0, 1, 2, 3\}, \delta, \{0, 1\}, \{2, 3\})$ mit $\delta(a) = \{(0, 1), (0, 2), (0, 0)\}$ und
 $\delta(b) = \{(0, 3), (1, 3), (2, 2)\}$ äquivalenten NFA B mit genau einem Start- und genau einem akzeptierenden Zustand.
 c. Warum ist die Bedingung $I \cap F = \emptyset$ notwendig?
 Konstruieren Sie ein Gegenbeispiel mit $I \cap F \neq \emptyset$.

Aufgabe 7.5:

- a. Geben Sie ein Verfahren an zur Konstruktion eines NFA $C = (X, Q_C, \delta_C, I_C, F_C)$ (ohne ε -Übergänge), welcher für zwei gegebene NFA $A = (X, Q_A, \delta_A, I_A, F_A)$ und $B = (X, Q_B, \delta_B, I_B, F_B)$ die Sprache $L(A) \circ L(B) \circ L(A)$ akzeptiert.

- (a) Entwerfen Sie einen Algorithmus zur Konstruktion des NFA C , welcher die Konstruktionen aus der Vorlesung als „Unterprogramme“ verwendet.
- (b) Leiten Sie daraus eine direkte Konstruktionsvorschrift (wie in den Konstruktionen auf den Vorlesungsfolien) für den NFA C ab.

Hinweis: Vergessen Sie die Spezialfälle nicht, z.B.

$L(A) = \emptyset, L(B) = \emptyset, \varepsilon \in L(A), \varepsilon \in L(B)$ (auch kombiniert).

- b. Demonstrieren Sie Ihre Konstruktionsvorschrift mit den NFA $A = (X, Q_A, \delta_A, I_A, F_A)$ mit $Q_A = \{0, 1\}$, $I_A = F_A = \{0\}$ und $\delta_A(a) = \{(0, 1)\}$, $\delta_A(b) = \{(1, 0), (1, 1)\}$, $B = (X, Q_B, \delta_B, I_B, F_B)$ mit $Q_B = \{0, 1, 2\}$, $I_B = \{0\}$, $F_B = \{2\}$ und $\delta_B(a) = \{(0, 1), (1, 2), (2, 0)\}$, $\delta_B(b) = \emptyset$, beide mit $X = \{a, b\}$.

Aufgabe 7.6:

In der Vorlesung wurden Konstruktionen vorgestellt, welche zeigen, dass

P zu jedem NFA A ein äquivalenter vollständiger DFA existiert,

S die Menge $\text{REC}(\text{NFA})$ unter Spiegelung abgeschlossen ist.

Aus jedem NFA A lässt sich durch Nacheinanderausführung dieser Verfahren in der Reihenfolge $[P, S, P, S, P]$ ein NFA B konstruieren.

- a. Welche Eigenschaften hat der so entstandene NFA B ?
- b. Demonstrieren Sie diese Transformation am NFA $A = (\{a, b\}, \{0, 1, 2, 3, 4\}, \delta, \{0\}, \{4\})$ mit $\delta(a) = \{(0, 1), (1, 4), (2, 3), (3, 4), (4, 4)\}$ und $\delta(b) = \{(0, 2), (1, 2), (2, 2), (3, 0), (4, 4)\}$.
- c. Demonstrieren Sie diese Transformation an einem NFA A mit $L(A) = (a + b)^*bb(a)^*$

Aufgabe 7.7:

Konstruieren Sie nach dem in der Vorlesung vorgestellten Verfahren zum regulären Ausdruck $E = b(a^* + b)$ einen NFA A mit $L(A) = L(E)$

Aufgabe 7.8:

Geben Sie zwei äquivalente NFA A und B mit minimaler Anzahl an Zuständen an, die nicht isomorph sind. Zeigen Sie, dass

- a. beide NFA äquivalent sind,
- b. beide NFA nicht isomorph sind,
- c. kein äquivalenter NFA mit weniger Zuständen existiert.