

**12. Übung zu Theoretische Informatik: Automaten und formale Sprachen**

Sommersemester 2025

zu lösen bis 8. Juli 2025

**Aufgabe 12.1:**Gegeben ist der LBA  $A = (\{0, 1\}, \{q_0, q_1, q_2, q_3\}, \{0, 1, \square\}, \delta, q_0, \{q_3\}, \square)$  mit

$$\delta = \left\{ \begin{array}{l} (1, q_0, \square, q_0, R), (0, q_0, \square, q_1, R), (1, q_1, \square, q_1, R), (0, q_1, \square, q_2, R), \\ (0, q_2, \square, q_1, R), (1, q_2, \square, q_2, R), (\square, q_2, \square, q_3, L) \end{array} \right\}$$

- Geben Sie die Berechnungen von  $A$  auf den Wörtern  $0, 1, 00, 10, 010100, 10101$  aus der Startkonfiguration an.
- Welche Sprache akzeptiert  $A$  ?

**Aufgabe 12.2:**Gegeben ist die Turing-Maschine  $M = (\{a, b\}, \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}, \{a, b, x, \square\}, \delta, q_0, \{q_4\}, \square)$ 

$$\text{mit } \delta = \left\{ \begin{array}{l} (\square, q_0, \square, q_4, N), (\square, q_1, \square, q_2, L), (a, q_0, x, q_1, R), (a, q_1, a, q_1, R), (a, q_3, a, q_3, L), \\ (b, q_1, b, q_1, R), (b, q_2, x, q_3, L), (b, q_3, b, q_3, L), (x, q_0, x, q_4, N), (x, q_1, x, q_2, L), (x, q_3, x, q_0, R) \end{array} \right\}$$

- Geben Sie für jedes  $w \in \{\varepsilon, a, b, ab, ba, aba, abb, aabb\}$  die Berechnung aus der Startkonfiguration an.  
Welche dieser Wörter  $w$  werden von  $M$  akzeptiert ?
- Welche Sprache akzeptiert  $M$  ?
- Beschreiben Sie die Funktionsweise von  $M$  kurz.
- Wozu dient das Hilfssymbol  $x$  ? Wird es wirklich benötigt ?

**Aufgabe 12.3:**

Reguläre und kontextfreie Sprachen sind Turing-akzeptierbar.

- Wie lässt sich zu einem gegebenen NFA  $A = (X, Q, \delta, I, F)$  eine TM  $M$  mit  $L(A) = L(M)$  konstruieren ?  
Demonstrieren Sie Ihr Verfahren am NFA  $A = (\{a, b\}, \{0, 1, 2\}, \delta, \{0\}, \{0, 2\})$  mit  $\delta(a) = \{(0, 1), (2, 0)\}$  und  $\delta(b) = \{(1, 1), (1, 2)\}$ .
- Wie lässt sich zu einem gegebenen PDA  $A = (X, Q, \Gamma, \delta, q_0, F, \perp)$  eine TM  $M$  mit  $L(A) = L(M)$  konstruieren ?  
Demonstrieren Sie Ihr Verfahren an einem PDA, der die Dyck-Sprache akzeptiert.

**Aufgabe 12.4:**Gegeben ist die TM  $M = (\{0, 1\}, \{a, b, c, d, e, f, g, h\}, \{0, 1, \square\}, \delta, a, \{h\}, \square)$  mit

$$\delta = \left\{ \begin{array}{l} (0, a, 0, c, L), (1, a, 1, c, L), (\square, a, 1, d, R), (\square, c, 1, d, R), (0, d, 0, d, R), (1, d, 1, d, R), \\ (\square, d, \square, e, L), (0, e, 0, f, L), (1, e, 1, f, L), (\square, e, \square, b, N), (0, f, \square, f, L), (1, f, \square, f, L), \\ (\square, f, \square, b, N), (\square, b, \square, g, R), (\square, g, \square, g, R), (1, g, 1, h, N) \end{array} \right\}$$

- Geben Sie für jedes Wort  $w \in \{0, 1\}^n$  mit  $n \in \{0, 1, 2\}$  die Berechnung von  $M$  bei Eingabe von  $w$  bis zum Halt oder Erreichen eines Zustandes an, in dem offensichtlich ist, dass die Berechnung nicht terminiert.
- Beschreiben Sie die Arbeitsweise von  $M$  kurz.
- Welche Sprache akzeptiert  $M$  ?

**Aufgabe 12.5:**

Wie lässt sich aus einer TM  $M$  eine TM  $M'$  mit  $L(M') = L(M)^R$  konstruieren?  
Demonstrieren Sie Ihre Konstruktion an der TM aus der vorigen Aufgabe.

**Aufgabe 12.6:**

Gegeben ist die Sprache  $L = \{uava \mid a \in \{0, 1\} \wedge u, v \in \{0, 1\}^*\}$

- Geben Sie alle Wörter minimaler Länge in  $L$  an.
- Geben Sie zwei Wörter der Länge 5 in  $L$  an.
- Ist  $L$  kontextfrei? Begründen Sie.
- Ist  $L$  regulär? Begründen Sie.
- Geben Sie eine Grammatik  $G$  mit  $L(G) = L$  an.
- Geben Sie einen LBA  $A$  mit  $L(A) = L$  an.

**Aufgabe 12.7:**

Geben Sie für die (nichtdeterministische) TM  $M = (\{0, 1\}, \{q_0, q_1, f\}, \{0, 1, \square\}, \delta, q_0, \{f\}, \square)$  mit  $\delta = \{(0, q_0, 1, q_0, R), (1, q_0, 1, q_0, R), (1, q_0, 1, q_1, R), (1, q_1, 1, q_1, R), (\square, q_1, \square, f, L)\}$  und jedes der Wörter  $w_1 = 0$ ,  $w_2 = 1$ ,  $w_3 = 01$ ,  $w_4 = 101$ ,  $w_5 = 11011$

- alle möglichen Berechnungen von  $M$  auf  $w_i$  an.  
Das lässt sich als Baum mit Konfigurationen als Knoten darstellen (Startkonfiguration als Wurzel) und Verzweigungen bei mehreren anwendbaren Übergängen.
- Markieren Sie alle akzeptierenden Berechnungen für  $w_i$  in  $M$ .
- Welche Sprache akzeptiert  $M$  ?

**Aufgabe 12.8:**

Bestimmen Sie für die Turingmaschine  $M = (\{0, 1, \bullet\}, \{q_0, q_1, q_2\}, \{0, 1, \bullet, \square\}, \delta, q_0, \{q_2\}, \square)$  mit

$\delta = \{(1, q_0, \square, q_0, R), (0, q_0, \square, q_1, R), (\bullet, q_0, \square, q_2, R), (1, q_1, \square, q_1, N), (0, q_1, \square, q_1, N), (\bullet, q_1, \square, q_1, N)\}$

- die Berechnung von  $M$  für jedes der Eingabewörter  $11 \bullet 101$ ,  $101 \bullet 11$  und  $1 \bullet 10 \bullet 0$ ,
- eine kurze Beschreibung der Funktionsweise von  $M$ ,
- die von  $M$  akzeptierte Sprache

**Aufgabe 12.9:**

- Ist die Sprache  $L = \{a^{(3^n)}b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$  LBA-akzeptierbar ? Warum ?
- Ist für zwei Turing-akzeptierbare Sprachen  $L_1$  und  $L_2$  auch die Sprache  $L_1 \setminus L_2$  Turing-akzeptierbar ? Warum ?
- Existieren PDA-akzeptierbare Sprachen, die nicht Turing-akzeptierbar sind ? Warum?
- Existieren PDA-akzeptierbare Sprachen, deren Komplement nicht Turing-akzeptierbar ist ? Warum ?