HTWK Leipzig, Fakultät IM

Prof. Dr. Sibylle Schwarz sibylle.schwarz@htwk-leipzig.de

**11. Übung zu Theoretische Informatik: Automaten und formale Sprachen**
Sommersemester 2025 zu lösen bis 1. Juli 2025

**Aufgabe 11.1:**

Zeigen Sie mit den in der Vorlesung demonstrierten Verfahren , dass die folgenden Sprachen nicht kontextfrei sind:

$$L_1 = \{a^n b^m a^n b^m \mid m, n > 0\}$$
$$L_2 = \{a^n b^m c^k a^n b^m \mid k, m, n > 0\}$$
$$L_3 = \{ww \mid w \in \{a, b\}^*\}$$

**Aufgabe 11.2:**

Zeigen Sie durch die in der Vorlesung demonstrierten Verfahren, dass die Sprache
$L = \{a^j b^k c^l d^m \mid j = 0 \vee k = l = m\}$

a. den Chomsky-Typ 1 hat
(indem Sie eine Grammatik $G$ vom Chomsky-Typ 1 mit $L = L(G)$ angeben),

b. nicht kontextfrei ist.

c. Geben Sie für jede Länge $3, 7, 10$ je zwei Wörter $\in L$ und zwei Wörter $\notin L$ an.

**Aufgabe 11.3:**

Für die Dyck-Sprache (mit Klammerpaar $a, b$) $L$:

a. Geben Sie einen PDA $A$ an, welcher genau $L$ durch akzeptierende Zustände akzeptiert.
Zeigen Sie durch Angabe der Berechnungen (Konfigurationsfolgen), dass alle Wörter $w \in \{ab, abab, aaabbb, abaababb, aaabbabb\}$ von $A$ akzeptiert werden und keins der Wörter $w \in \{a, ba, abb, ababba\}$ von $A$ akzeptiert wird.

b. Transformieren Sie mit dem Verfahren aus der Vorlesung den PDA $A$ in einen PDA $B$, welcher genau $L$ durch leeren Keller akzeptiert.
Transformieren Sie entsprechend alle Berechnungen zur vorigen Teilaufgabe zu Berechnungen in $B$.

c. Geben Sie die Sprache $L' = L(A) \cap L(a^*b^*a^*b^*)$ an.
Für welche der Wörter $w$ aus der ersten Teilaufgabe gilt $w \in L'$?

**Aufgabe 11.4:**

Gegeben sind der PDA $A = (\{a, b\}, \{q\}, \{A, \perp\}, \delta_A, q, \perp)$ (Akzeptanz durch leeren Keller) mit $\delta_A(a) = \{(q, q, \perp, \varepsilon), (q, q, A, \varepsilon)\}$, $\delta_A(b) = \{(q, q, \perp, A\perp), (q, q, A, AA)\}$ und $\delta_A(\varepsilon) = \emptyset$.
und der NFA $B = (\{a, b\}, \{0, 1\}, \delta_B, \{0\}, \{1\})$ mit
$\delta_B(a) = \{(1, 1)\}, \delta_B(b) = \{(0, 0)\}, \delta_B(\varepsilon) = \{(0, 1)\}$

a. Welche der Wörter $\varepsilon$, $a$, $b$, $aa$, $ab$, $ba$, $abb$,$baa$,$ababaa$, $babbaaa$ werden von $A$ akzeptiert?
Geben Sie für die akzeptierten Wörter eine akzeptierende Konfigurationenfolge und für die nicht akzeptierten Wörter eine möglichst lange Berechnung aus der Startkonfiguration an.

b. Welche Sprache akzeptiert $A$?

c. Konstruieren Sie einen zu $A$ äquivalenten PDA $C$, der durch akzeptierende Zustände akzeptiert.

d. Konstruieren Sie einen PDA $D$ mit $L(D) = L(C) \cap L(B)$, der durch akzeptierende Zustände akzeptiert.

e. Konstruieren Sie einen zu $D$ äquivalenten PDA, der durch leeren Keller akzeptiert.

f. Welche Sprache akzeptiert $D$?

g. Zeigen Sie, dass die Sprache $L(D)$ nicht regulär ist.

**Aufgabe 11.5:**

a. Zeigen Sie, dass die Sprache $L = \{wa^iw^Rb^j \mid w \in \{a,b\}^* \wedge i, j > 0\}$ kontextfrei ist.

b. Geben Sie einen PDA $A$ mit $L = L(A)$ an.

c. Ist die Sprache auch deterministisch kontextfrei? Begründen Sie Ihre Antwort.

**Aufgabe 11.6:**

Zeigen Sie, dass die Menge $\mathsf{REC(PDA)}$ nicht unter Komplement abgeschlossen ist.
Hinweis: Sie können dazu die in der Vorlesung gezeigten Fakten verwenden:
$\mathsf{REC(PDA)}$ ist unter $\cup$ abgeschlossen. $\mathsf{REC(PDA)}$ ist nicht unter $\cap$ abgeschlossen.

**Aufgabe 11.7:**

Zeigen Sie, dass die in der Vorlesung definierte Äquivalenz von Kellerautomaten einen Äquivalenzrelation ist.

**Aufgabe 11.8:**

Bestimmen Sie für alle folgenden Sprachen $L_i$, ob $L_i$ regulär, kontextfrei oder nichts von beiden ist. Begründen Sie in allen Fällen Ihre Antwort kurz.

$$
\begin{aligned}
L_1 &= \{a^nb^n \mid n > 0\} \circ \{a^nb^n \mid n > 0\} \\
L_2 &= \{a^nb^ma^{n+1} \mid m, n > 0\} \\
L_3 &= \{a^mb^na^{m+n} \mid m, n > 0\} \\
L_4 &= \{a^na^ma^n \mid m, n > 0\} \\
L_5 &= \{a^mb^nc^l \mid m = l\} \\
L_6 &= \{wab^naw^R \mid w \in \{a,b\}^* \wedge n \in \mathbb{N}\} \\
L_7 &= \{a^ib^ja^k \mid i, j, k > 0\} \\
L_8 &= \{a^ib^ja^k \mid i = j \vee i = k \vee j = k\} \\
L_9 &= \{w \in \{a,b,c\}^* \mid |w|_a < |w|_c\} \cap \{a,b\}^* \\
L_{10} &= \{ucv \in \{a,b,c\}^* \mid u \in \{a,b\}^* \wedge v \in \{a,b\}^*\} \\
L_{11} &= \{ucv \in \{a,b,c\}^* \mid u \in \{a,b,c\}^* \wedge v \in \{a,b,c\}^* \wedge |u| = |v|\} \\
L_{12} &= \{ucv \in \{a,b,c\}^* \mid u \in \{a,b,c\}^* \wedge v \in \{a,b,c\}^* \wedge |u| = |v|\} \cap \{a,b\}^* \\
L_{13} &= \{w \in \{a,b,c\}^* \mid 3|w|_a = |w|_c\} \cap \{a,b\}^*
\end{aligned}
$$