

Zu zeigen: In jeder Halbgruppe, in der es ein
linksneutrales und ein rechtsneutrales Element gibt,
sind diese gleich.

Zu zeigen: In jeder Halbgruppe, in der es ein
 linksneutrales und ein rechtsneutrales Element gibt,
 sind diese gleich.

HG-Axiom $\forall x \forall y \forall z : x(yz) = (xy)z$
 linksneutrales El. f $\forall x : f \cdot x = x$
 rechtsneutrales El. e $\forall x : x \cdot e = x$

zu zeigen: $e = f$

Zu zeigen: In jeder Halbgruppe, in der es ein
 linksneutrales und ein rechtsneutrales Element gibt,
 sind diese gleich.

HG-Axiom $\forall x \forall y \forall z : x(yz) = (xy)z$ (assoc)
 linksneutrales El. f $\forall x : fx = x$ (nl)
 rechtsneutrales El. e $\forall x : xe = x$ (nr)

zu zeigen: $e = f$

Beweis: $e \stackrel{(nl)}{=}_{x=e} fe \stackrel{(nr)}{=}_{x=f} f$

Zu zeigen: In jeder Halbgruppe, in der es ein linksneutrales und ein rechtsneutrales Element gibt, sind diese gleich.

$\left[\begin{array}{l} \text{HG-Axiom} \\ \text{linksneutrales El. } f \\ \text{rechtsneutrales El. } e \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \forall x \forall y \forall z : x(yz) = (xy)z \\ \forall x : fx = x \\ \forall x : xe = x \end{array} \quad \begin{array}{l} (\text{assoc}) \\ (\text{nl}) \\ (\text{nr}) \end{array}$

zu zeigen: $e = f$

Beweis: $e \stackrel{(\text{nr})}{=} fe \stackrel{(\text{nr})}{=} f$

in Gp: $\left[\begin{array}{l} \text{axiom assoc: } \text{times } x (\text{times } y z) = \text{times } (\text{times } x y) z \\ \text{axiom nl: } \text{times } f x = x \\ \text{axiom nr: } \text{times } x e = x \end{array} \right. \quad \text{Lemma: } e = f$

Zu zeigen: In jeder Halbgruppe, in der es ein linksneutrales und ein rechtsneutrales Element gibt, sind diese gleich.

$$\begin{array}{l}
 \text{HG-Axiom} \\
 \text{linksneutrales El. } f \\
 \text{rechtsneutrales El. } e
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 \forall x \forall y \forall z : x(yz) = (xy)z \\
 \forall x : f \cdot x = x \\
 \forall x : x \cdot e = x
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 (\text{assoc}) \\
 (nl) \\
 (nr)
 \end{array}$$

zu zeigen: $e = f$

Beweis: $e \stackrel{(nl)}{=} f e \stackrel{(nr)}{=} f$

in Gp:

$$\left[\begin{array}{l}
 \text{axiom assoc: times } x (\text{times } y z) =: \text{times } (x \text{ times } y) z \\
 \text{axiom nl: times } f x =: x \\
 \text{axiom nr: times } x e =: x
 \end{array} \right.$$

Lemma: $e =: f$

Proof by rewriting

$$\begin{array}{l}
 e \\
 (\text{by nl}) =: \text{times } f e \\
 (\text{by nr}) =: f
 \end{array}$$

QED