HTWK Leipzig, Fakultät IM

Prof. Dr. Sibylle Schwarz sibylle.schwarz@htwk-leipzig.de

3.Übung zur Vorlesung „Fortgeschrittene Programmierung“
Sommersemester 2020 zu lösen bis 29. April 2020

Aufgabe 3.1:

Zeigen Sie, dass in jeder Gruppe zu jedem Element das linksinverse Element zugleich das rechtsinverse Element ist.
Gegeben sind also die Gruppenaxiome

$$\forall x \forall y \forall z \;:\; x(yz) = (xy)z \tag{1}$$

$$\forall x \;:\; ex = x \tag{2}$$

$$\forall x \exists x^{-1} \;:\; x^{-1}x = e \quad (x^{-1} \text{ linksinvers zu } x) \tag{3}$$

und zu zeigen ist, das für jedes x und genau das nach (3) für dieses x existierende Inverse x^{-1} gilt $xx^{-1} = e$ (x^{-1} ist auch rechtsinvers zu x).
Beweisen Sie dies durch eine Folge von Anwendungen der Gleichungen und geben Sie in jedem Schritt an, welche Gleichung Sie an welcher Stelle im Term angewendet haben.

Aufgabe 3.2:

Zeigen Sie, dass jedes Monoid $(M, \cdot, e)$, in dem $\varphi = (\forall x(xx = e))$ gilt, kommutativ ist.
Geben Sie dazu an:

a. ein Beispiel für ein solches Monoid,
b. eine formale Beschreibung:
   (a) eine Signatur, mit der sich Voraussetzungen und Behauptung formalisieren lassen,
   (b) die Menge Φ, die alle Axiome zur Charakterisierung von Monoiden enthält,
   (c) den Satz ψ, der die Behauptung repräsentiert.

   Vergessen Sie die Quantoren nicht.
c. Zeigen Sie, dass die Behauptung in Ihrem Monoid gilt.
d. Zeigen Sie, dass die Behauptung in jedem Monoid mit der Eigenschaft φ gilt, dass also ψ aus $\Phi \cup \{\varphi\}$ folgt.
   Beweisen Sie dies durch eine Folge von Anwendungen von Gleichungen und geben Sie in jedem Schritt an, welche Gleichung Sie an welcher Stelle im Term angewendet haben.
e. Transformieren Sie Voraussetzungen, Behauptung und Beweis in cyp-Syntax.
f. Verifizieren Sie Ihren Beweis in cyp.

Aufgabe 3.3:

Über ein Monoid $(M, \cdot, 1)$ mit Elementen $a, b \in M$ (und evtl. weiteren) ist bekannt: $aa = bb = (ab)(ab) = 1$

a. Geben Sie ein solches Monoid an, in dem $a, b, 1$ paarweise verschieden sind.
b. Überprüfen Sie $ab = ba$ in Ihrem Modell.
c. Leiten Sie $ab = ba$ aus den Monoid-Axiomen und den gegebenen Gleichungen ab.

Aufgabe 3.4:

Zu jedem der folgenden Sätze zum Datentyp Bool mit mit den gegebenen Implementierungen von `not` und `xor` :

i) Formulieren Sie den LeanCheck-Test zur Überprüfung dieser Gleichung und wenden Sie ihn an (in ghci).

ii) Beweisen Sie die Gleichung schriftlich durch eine Folgen von Termersetzungsschritten. Geben Sie jeweils die angewendete Regel, die Position im Term, an der sie angewendet wird und die zu jeder Variablen in der Regel den Term, durch den sie ersetzt wird, an.

iii) Übersetzen Sie Ihren schriftlichen Beweis in einen Beweis in cyp und überprüfen Sie ihn mit cyp.

$$
\begin{aligned}
\varphi_1 &= \forall x : (x \ \mathbf{xor}\ \mathbf{f}) = x \\
\varphi_2 &= \forall x \forall y : (x \ \mathbf{xor}\ y) = (y \ \mathbf{xor}\ x) \\
\varphi_3 &= \forall x \forall y : (x \ \mathbf{xor}\ y) = ((\neg y) \ \mathbf{xor}\ (\neg x)) \\
\varphi_4 &= \forall x \forall y : x \ \mathbf{xor}\ (\neg y) = (\neg x) \ \mathbf{xor}\ y
\end{aligned}
$$

Aufgabe 3.5:

Zu jeder der folgenden Gleichungen zum Datentyp Himmelsrichtungen:

```
data HR : N | O | S | W
```

mit den gegebenen Implementierungen von `rechts, links, um`

(i) Formulieren Sie den LeanCheck-Test zur Überprüfung dieser Gleichung und wenden Sie ihn an (in ghci).

(ii) Beweisen Sie die Gleichung schriftlich durch eine Folgen von Termersetzungsschritten. Geben Sie jeweils die angewendete Regel, die Position im Term, an der sie angewendet wird und die zu jeder Variablen in der Regel den Term, durch den sie ersetzt wird, an.

(iii) Übersetzen Sie Ihren schriftlichen Beweis in einen Beweis in cyp und überprüfen Sie ihn mit cyp.

a. `rechts ( rechts ( rechts N ) ) == links N`

b. `rechts ( rechts ( rechts x ) ) == links x`

c. `rechts ( rechts ( um x ) ) ==  x`

d. `rechts ( um ( links x ) ) ==  um x`

e. `links ( um ( links x ) ) ==  x`

f. `um ( rechts x ) == links x`

g. `um ( rechts x ) == rechts ( um x )`
