

Rekursiver Datentyp Peano-Zahlen

```
data N = Z | S N
```

Menge aller Peano-Zahlen: $N = \{Z\} \cup \{S(n) \mid n \in N\}$

Addition:

```
add :: N -> N -> N
add Z y          = y
add ( S x ) y = S ( add x y )
```

oder

```
add :: N -> N -> N
add x y = case x of
    Z      -> y
    S x'   -> S ( add x' y )
```

ÜA (Autotool): Definition der Operationen Multiplikation, Potenz

Wiederholung ADT N

Sorten: N (natürliche Zahlen)

Signatur: $Z :: N$
 $S :: N \rightarrow N$
 $\text{add} :: N \rightarrow N \rightarrow N$
 $\text{mult} :: N \rightarrow N \rightarrow N$
...

Axiome: $\forall x \forall y \forall u$:

$\text{add } Z \ x$	$=$	$x = \text{add } x \ Z$
$\text{add } x \ y$	$=$	$\text{add } y \ x$
$\text{add } x \ (\text{add } y \ u)$	$=$	$\text{add } (\text{add } x \ y) \ u$
$\text{mult } Z \ x$	$=$	$Z = \text{mult } x \ Z$
$\text{mult } (S \ Z) \ x$	$=$	$x = \text{mult } x \ (S \ Z)$
$\text{mult } x \ y$	$=$	$\text{mult } y \ x$
$\text{mult } x \ (\text{mult } y \ u)$	$=$	$\text{mult } (\text{mult } x \ y) \ u$
...		

Nachweis durch strukturelle Induktion

Wiederholung Strukturelle Induktion

Induktive Definition strukturierter Daten (rekursive Datentypen):

IA: Basisfälle

IS: rekursive Fälle, Vorschrift zur Konstruktion zusammengesetzter Daten

Induktive Definition rekursiver Funktionen über strukturierten Daten:

IA: Definition des Funktionswertes für Basisfälle

IS: Berechnung des Funktionswertes der zusammengesetzten Daten aus den Funktionswerten der Teile

Prinzip der strukturellen Induktion

zum Nachweis einer Aussage A über strukturierte Daten:

IA: Nachweis, dass A für alle Basisfälle gilt

IS:

- ▶ Hypothese (Voraussetzung): A gilt für Teildaten
- ▶ Behauptung: A gilt für aus Teildaten zusammengesetzte Daten
- ▶ Induktionsbeweis: Nachweis, dass Behauptung aus Hypothese folgt.