HTWK Leipzig, Fakultät IM

Prof. Dr. Sibylle Schwarz sibylle.schwarz@htwk-leipzig.de

1.Übung im Modul „Künstliche Intelligenz (Wissensrepräsentation und -Verarbeitung)"

Sommersemester 2019 gestellt am 4. Juli 2019

Aufgabe 1.1:

Finden Sie für jede der Booleschen Funktionen

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2) &= x_1 \wedge \neg x_2 \\ f_2(x_1, x_2) &= \neg(x_2 \rightarrow \neg x_1) \\ f_3(x_1, x_2) &= \neg(x_1 \vee x_2) \\ f_4(x_1, x_2, x_3) &= (x_1 \wedge x_2) \vee (x_2 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge x_3) \\ f_5(x_1, x_2, x_3) &= x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3 \end{aligned}$$

a. ein McCulloch-Pitts-Neuron (falls möglich ohne hemmende Eingänge), welches diese Funktion berechnet,

b. eine geometrische Interpretation dieser Funktion.

Aufgabe 1.2:

Gegeben ist das McCulloch-Pitts-Neuron u ohne Hemmung mit vier (erregenden) Eingängen und dem Schwellwert $\theta_u = 2$.
Beschreiben Sie die von diesem Neuron berechnete Boolesche Funktion f_u durch eine aussagenlogische Formel.

Aufgabe 1.3:

Gegeben ist das McCulloch-Pitts-Neuron v (mit Hemmung) mit zwei erregenden Eingängen x_1 und x_2, einem hemmenden Eingang x_3 und dem Schwellwert $\theta_v = 1$.
Beschreiben Sie die von diesem Neuron berechnete Boolesche Funktion f_v durch eine aussagenlogische Formel.
Überlegen Sie sich auch die geometrische Interpretation.

Aufgabe 1.4:

Finden Sie ein McCulloch-Pitts-Netz zur Berechnung der booleschen Funktion $x_1 \leftrightarrow x_2$

Aufgabe 1.5:

Finden Sie ein McCulloch-Pitts-Netz zur Berechnung der booleschen Funktion

$$f(x,y,z) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x = y = z \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Überlegen Sie sich auch die geometrische Interpretation.

Aufgabe 1.6:

Gegeben ist das Schwellwertelement u mit drei Eingängen, den Eingangsgewichten $w_1 = 2$, $w_2 = -1$, $w_3 = -1$ und dem Schwellwert $\theta_u = 1$

a. Welche Boolesche Funktion berechnet dieses Schwellwertelement? Geben Sie eine aussagenlogische Formel für diese Boolesche Funktion an.

b. Konstruieren Sie ein Schwellwertelement mit Schwellwert 0, welches dieselbe Boolesche Funktion berechnet.

Aufgabe 1.7:

Finden Sie durch schrittweises Training der Gewichte mit der Δ-Regel für jede der Booleschen Funktionen

$$\begin{aligned} f_1(x_1,x_2) &= \neg(x_1 \to x_2) \\ f_2(x_1,x_2,x_3,x_4) &= \begin{cases} 1 & \text{falls mindetens drei der Eingabewerte 1 sind} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

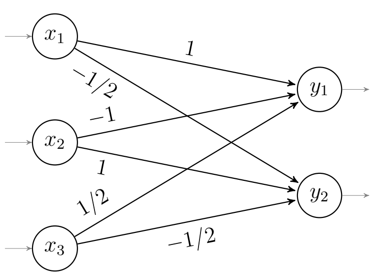
ein Schwellwertelement, welches diese Funktion berechnet. Zu Beginn des Trainings sind alle Gewichte 0.

Aufgabe 1.8:

Die Boolesche Funktion XOR lässt sich nicht durch ein Schwellwertelement berechnen. Was geschieht, wenn man versucht, ein Schwellwertelement mit dieser Funktion zu trainieren?
Trainieren Sie ein Schwellwertelement mit den Anfangsgewichten $w_0 = w_1 = w_2 = 1$ über mehrere Durchläufe aller möglichen Werte der Funktion XOR.

Aufgabe 1.9:

Bestimmen Sie für das nebenstehende Ein-Schicht-FFN mit den Schwellwertelementen y_1, y_2 mit Schwellwert 0



a. die Gewichtsmatrix,

b. die Netzausgaben für die Eingaben $(0,0,0), (1,0,0), (1,0,1), (1,1,0), (1,1,1)$.

Aufgabe 1.10:

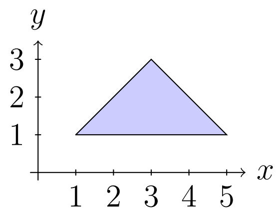
Finden Sie ein FFN aus Schwellwertelementen (alle mit Schwellwert 0), welches genau den Booleschen Eingaben $(0,0,0)$, $(0,1,0)$ und $(1,1,1)$ den Wert 0 und allen anderen Booleschen Eingabe-Tripeln den Wert 1 zuordnet.

Aufgabe 1.11:

Finden Sie durch schrittweises Training der Gewichte mit der Δ-Regel ein Ein-Schicht-FFN mit drei Ausgabeneuronen, welches zu drei Booleschen Eingaben deren Minimum, Maximum und Durchschnitt (gerundet auf 0 oder 1) berechnet.

Aufgabe 1.12:

Entwerfen Sie ein Ein-Schicht-FFN, welches genau allen Punkten im blau markierten Bereich im Diagramm den Wert 1 und alle anderen Punkten den Wert 0 zuordnet.



Aufgabe 1.13:

a. Modellieren Sie die folgenden Aufgabe formal:

   - 3 von 5 Hüten (2 weiß, 3 rot) werden 3 Weisen aufgesetzt, so dass keiner die Farbe seines Hutes, aber die Farben aller anderen Hüte sehen kann.
   - Jeder wird der Reihe nach gefragt, ob er die Farbe seines Hutes weiß.
     Antworten im folgenden Gespräch:

     1 Nein

     2 Nein

     3 Ja

b. Warum weiß der dritte Gefragte seine Farbe auf jeden Fall?

c. Bei welchen Hut-Verteilungen kennt der erste Gefragte seine Farbe?

d. Bei welchen Hut-Verteilungen kennt der erste Gefragte seine Farbe nicht, aber der Zweite?

Aufgabe 1.14:

Lineares Solitaire (Steckhalma) wird wie folgt gespielt:

Spielbeginn: n Spielsteine, je einer auf n benachbarten Spielfeldern in einer Reihe.

Spielzug: Springe mit einem Stein über *einen* benachbarten Stein auf das dahinterliegende *freie* Feld und entferne den übersprungenen Stein.

Spielende: Das Spiel endet, wenn kein Spielzug möglich ist.

a. Modellieren Sie das lineare Solitaire-Spiel.
   Geben Sie dazu *formale* Beschreibungen an für

   (a) Zustände des Spieles (Daten)

   (b) Regeln für erlaubte Übergänge zwischen den Spielzuständen.

b. Geben Sie in dieser Beschreibung alle aus der Ausgangsposition mit 4 Steinen durch einen oder mehrer Spielzüge erreichbaren Spielzustände an.

c. Beschreiben Sie für eine Ausgangsposition mit 4 Steinen zwei verschiedene Spielabläufe (bis Spielende).

d. Finden Sie alle von der Ausgangsposition mit 5 Steinen erreichbaren Spielzustände, auf welche keine Regel anwendbar ist.

e. Beschreiben Sie alle Zustände formal, in denen kein Spielzug möglich ist.

Aufgabe 1.15:

Geben Sie für die Spiele

- Türme von Hanoi (mit n Scheiben auf m Stapeln)
- Sudoku
- Gomoku (5 in einer Reihe)
- Sokoban (`https://sokoban.info`)

jeweils formal an:

Wissensbasis (Kontext)

Frage (Instanz)

Lösung

und stellen Sie Lösungsverfahren vor.

Aufgabe 1.16:

a. Finden Sie für das Schiebefax-Spiel eine Stellung, aus welcher der Zielzustand

1	2	3
8	0	4
7	6	5

in genau 7 Zügen erreicht werden kann und kein kürzerer Weg zu einer Lösung existiert.

b. Bestimmen Sie für jeden Zustand auf dem Weg zur Lösung die Werte der drei in der Vorlesung besprochenen heuristischen Funktionen

- h_1: Anzahl der Zahlen (incl. 0 für Leerfeld) auf einer falschen Position,
- h_2: Maximum der Manhattan-Abstände aller Zahlen von ihrer Zielposition,
- h_3: Summe der Manhattan-Abstände aller Zahlen von ihrer Zielposition.

c. Für jedes $i \in \{1, 2, 3\}$ wird die Heuristik h'_i definiert wie h_i, jedoch jeweils ohne Berücksichtigung des Leerfeldes (der 0).
Bestimmen Sie auch die Werte der Positionen unter diesen Heuristiken und die Unterschiede bzgl. der Expansionsreihenfolge der Knoten.

d. Finden Sie einen Zustand, von dem aus der Zielzustand nicht erreichbar ist. Begründen Sie Ihre Lösung.

e. Ist die Anzahl der Folgezustände (direkte Zugmöglichkeiten) in jedem Zustand eine geeignete heuristische Funktion? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 1.17:

Geben Sie für die folgenden Schätzfunktionen an, welche Eigenschaften (perfekt, zielerkennend,...) sie haben:

a. Missionare und Kannibalen:
$h(z) =$ Anzahl der Personen am Startufer

b. Schiebefax: Heuristiken $h_1, h'_1, h_2, h'_2, h_3, h'_3$
h_4 mit $\forall h : h(u) = 0$
h_5 mit $\forall h : h(u) = 1$
h_6 mit $\forall h : h(u) = \min(2, H(u))$
h_7 mit $\forall h : h(u) = \max(2, H(u))$

Aufgabe 1.18:

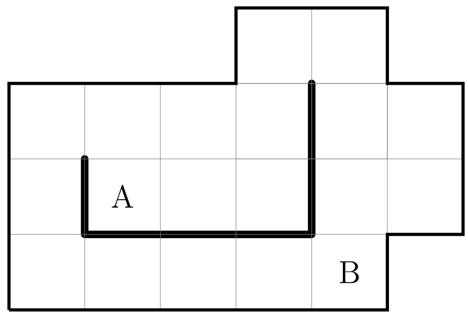
Zeigen Sie:

a. Jede nicht-überschätzende Heuristik ist sicher und zielerkennend.

b. Jede Heuristik, die zielerkennend und konsistent ist, ist auch nicht-überschätzend.

Aufgabe 1.19:

Im Raum mit nebenstehendem Grundriss soll ein Weg (Folge von paarweise an einer Kante benachbarten Feldern) von A nach B gefunden werden.



a. Modellieren Sie dieses Problem formal als Suchproblem, also Beschreibung der Zustände (Knotenmarkierungen) und Bedingungen an die Lösungen (Markierung der Zielknoten).

b. Finden Sie mit den beiden blinden Suchverfahren (Breiten- und Tiefensuche) die jeweils erste Lösung und notieren Sie sich die Anzahl der besuchten Knoten.

c. Überlegen Sie sich Kriterien zur Bewertung der Qualität der Lösungen.

d. Abbiegen ist anstrengend und jedes Abbiegen kostet zusätzlich genausoviel wie ein Schritt in ein Nachbarfeld (je eine Einheit).
Finden Sie durch Bestensuche mit dieser Kostenfunktion einen Weg von A nach B.

e. Die noch zurückzulegende Entfernung wird durch den Manhattan-Abstand des aktuellen Feldes zum Zielfeld abgeschätzt.
Finden Sie durch Greedy-Suche mit dieser heuristischen Funktion einen Weg von A nach B.

f. Finden Sie durch A*-Suche mit diesen beiden Funktionen einen Weg von A nach B.

Aufgabe 1.20:

a. Bestimmen Sie für die in der Vorlesung vorgestellte Variante des Nim-Spieles mit Startsituation $S : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $S(8) = 1 \land \forall i \neq 8 : S(i) = 0$ die MiniMax-Werte aller aus S erreichbaren Situationen.
Wer gewinnt das Spiel, wenn beide Spieler optimal spielen?

b. Modellieren Sie die folgende Variante des Nim-Spieles mit einem Stapel:

- Zu Beginn liegen n Münzen auf dem Stapel.
- Spielzug: Entfernen einer Zahl $x \in \{1, 2, 3\}$ von Münzen vom Stapel,
- Sobald ein Spieler keinen Zug mehr ausführen kann, hat er verloren (und der andere gewonnen).

und geben Sie für alle $n \in \{1, 2, \ldots, 6\}$ die Zustandsübergangssysteme des Spieles mit MiniMax-Werten und Gewinnern bei optimalem Spiel beider Spieler an.
Ist dieses Spiel ein Nullsummenspiel?

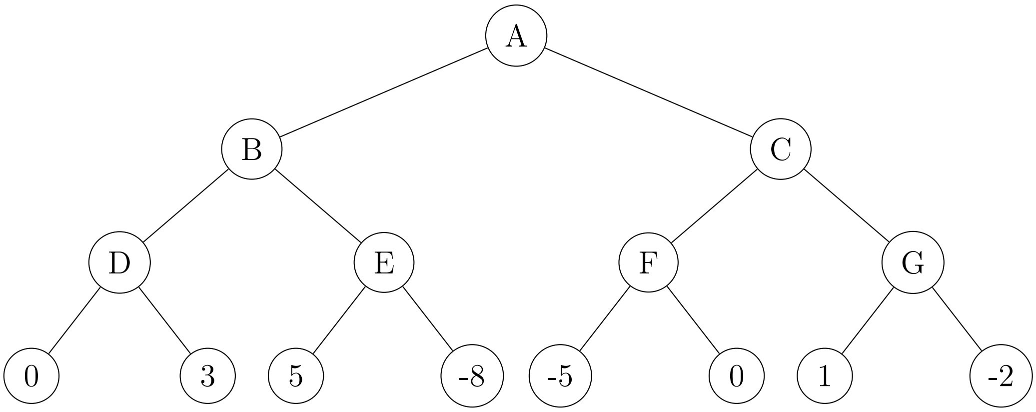
c. Eine weitere Nim-Variante mit einem Stapel hat dieselben Regeln wie oben, aber in jedem Zug darf die unmittelbar davor gewählte Anzahl nicht gewählt werden.
Modellieren Sie auch diese Variante des Nim-Spieles mit einem Stapel und geben Sie für alle $n \in \{1, 2, \ldots, 6\}$ die Zustandsübergangssysteme des Spieles mit MiniMax-Werten und Gewinnern bei optimalem Spiel beider Spieler an.
Ist dieses Spiel ein Nullsummenspiel?

Aufgabe 1.21:

Gegeben ist der untenstehende Baum. In den Blättern stehen die Spielwerte. Spieler 1 (Max) ist am Zug.

a. Bestimmen Sie die Minimax-Werte aller Knoten dieses Baumes.

b. Welche Teilbäume werden bei der α-β-Suche nicht besucht?



Aufgabe 1.22:

Zeigen Sie mit dem aussagenlogischen Resolutionsverfahren, dass

a. die Formelmenge $\Phi = \{\neg a \vee b, \neg b \vee c \vee \neg a, a, \neg c\}$ unerfüllbar ist.

b. die Formel $\psi = (p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))$ allgemeingültig ist.

c. $\{p \vee q \vee r, \neg q \vee s, \neg p \vee s, \neg r \vee s\} \models s$ gilt.

d. $\{p \to q, \neg(q \to r) \to \neg p\} \models p \to r$ gilt.

Aufgabe 1.23:

Untersuchen Sie mit dem aussagenlogischen Resolutionsverfahren, ob die Formel $\psi = (a \wedge b)$ aus der Formelmenge $\Phi = \{(c \wedge d) \to e, c \vee f, d \vee f, d \to a, e \to b, \neg f\}$ folgt.

Aufgabe 1.24:

Formalisieren Sie die folgende Situation als Folgerungsproblem und beantworten Sie die Frage durch aussagenlogische Resolution:

- Tina oder Paul werden die Party besuchen.
- Wenn Paul zur Party geht, wird auch Anna hingehen, es sei denn, Bob geht hin.
- Bob besucht die Party, wenn Tina nicht hingeht.

Frage: Geht Anna zur Party?

Aufgabe 1.25:

Zeigen Sie, dass man im Allgemeinen beim Bilden der Resolventen nicht zwei verschiedene Literale gleichzeitig eliminieren kann (z.B. zur Klauselmenge $\{\{a \vee b \vee c\}, \{\neg a \vee \neg b \vee c\}\}$ die Klausel $\{c\}$ hinzufügen, ohne die Modellmenge zu ändern).

Aufgabe 1.26:

Gegeben ist die Formelmenge

$$\Phi = \left\{ \begin{array}{l} E(a,b), E(a,c), E(b,c), E(c,d), \\ \forall x P(x,x), \\ \forall u \forall w ((\exists v (E(u,v) \wedge P(v,w))) \rightarrow P(u,w)) \end{array} \right\}$$

Bestimmen Sie durch Grundinstanziierung und aussagenlogische Resolution, für welche Belegungen der Individuenvariablen gilt:

a. $\Phi \models P(b,d)$

b. $\Phi \models P(b,x)$

c. $\Phi \models P(x,d)$

d. $\Phi \models P(x,y)$

Aufgabe 1.27:

Zeigen Sie durch prädikatenlogische Resolution, dass die folgende Klauselmenge nicht erfüllbar ist:

$$\{\neg P(x) \vee \neg P(f(a)) \vee Q(y), P(y), \neg P(g(b,x)) \vee \neg Q(b)\}$$

Aufgabe 1.28:

Finden Sie durch prädikatenlogische Resolution Antworten für das logische Programm P:

```
Q(X,X).
R(b,c).
R(a,c).
Q(X,Z) :- Q(Y,Z), R(X,Y).
```

und die Anfragen

a. `?- Q(a,c).`

b. `?- Q(X,c).`

c. `?- Q(b,X).`

d. `?- Q(X,Y).`

Aufgabe 1.29:

a. Modellieren Sie die folgende Sachverhalte als logisches Programm:

- Regelmenge:

  R1 Feldwege sind befahrbar.
  R2 Landstraßen sind befahrbar.
  R3 Flüsse sind in Flussrichtung befahrbar.

  Definieren Sie durch eine zusätzliche Regel ein zweistelliges Prädikat „erreichbar", welches die Erreichbarkeit (über einen oder mehrere aufeinanderfolgende Streckenabschnitte) repräsentiert.

- Faktenmenge:

  F1 Feldwege gibt es zwischen A und C und zwischen B und D.
  F2 Landstraßen gibt es zwischen C und D und zwischen B und E.
  F3 Flüsse fließen von A nach B und von E nach D.

b. Beantworten Sie die folgenden Fragen durch Resolution. Bestimmen Sie jeweils alle Antworten. Überprüfen Sie Ihre Antworten mit Hilfe eines Prolog-Interpreters.

  (a) Ist D von A erreichbar?
  (b) Welche Orte sind von B erreichbar?
  (c) Von welchen Orten ist B erreichbar?

Aufgabe 1.30:
Geben Sie zu jedem der folgenden logischen Programme P_i

$$\begin{aligned}
P_1 &= \{\neg p \to p\} \\
P_2 &= \{\neg p \to q, \neg s \to p\} \\
P_3 &= \{q \land \neg r \to p, r \land \neg s \to p, p \to q, q \to r\} \\
P_4 &= \{\neg q(x) \to p(x), q(a), r(b)\} \\
P_5 &= \{\neg q(a) \to p(a), \neg p(a) \to q(a), p(c), r(a) \to p(a)\}
\end{aligned}$$

folgende Mengen an:

a. die Menge aller Modelle von P_i,

b. die Menge aller minimalen Modelle von P_i,

c. die Menge aller stabilen Modelle von P_i.

Aufgabe 1.31:
Finden Sie zu jedem der folgenden erweiterten logischen Programme P_i

$$
\begin{aligned}
P_1 &= \{q \to p, \overline{p} \to r\}\\
P_2 &= \{q \to p, \overline{p} \to r, r\}\\
P_3 &= \{q \to p, \overline{p} \to r, q\}\\
P_4 &= \{q \to p, \overline{p} \to r, q, r\}\\
P_5 &= \{\overline{p}, \overline{q} \to p\}\\
P_6 &= \{\overline{p}, \overline{p} \to q\}\\
P_7 &= \{\neg p \to \overline{q}\}\\
P_8 &= \{\neg r \to s, \neg s \to r, s \to q, s \to \overline{q}\}
\end{aligned}
$$

a. die Menge aller Modelle von P_i,

b. alle Answer-Sets von P_i.

Aufgabe 1.32:
Geben Sie zu allen folgenden Programmen alle Modelle und alle Answer sets an:

$P_1 = \{$`c :-  not t.`$\}$
$P_2 = \{$`c :- ~t.`$\}$
$P_3 = \{$`c :- ~t. ~t. `$\}$
$P_4 = \{$`c :- ~t. ~t. ~c. `$\}$
$P_5 = \{$`c :- ~t. ~t :- not t. ~c. `$\}$

Vergleichen Sie die Wirkung der verschiedenen Negationen.

Aufgabe 1.33:
Untersuchen Sie, ob die aus der zweiwertigen Logik bekannten Äquivalenzen

$$
\begin{aligned}
\neg\varphi &\equiv \varphi \to \mathbf{f}\\
\neg(\varphi \wedge \psi) &\equiv \neg\varphi \vee \neg\psi\\
\varphi \to \psi &\equiv \neg\varphi \vee \psi\\
\varphi \to (\psi \to \varphi) &\equiv \mathbf{t}
\end{aligned}
$$

auch in folgenden Logiken gelten:

a. dreiwertige Łukasiewicz-Logik mit $\vee, \wedge$

b. dreiwertige Łukasiewicz-Logik mit $\underline{\vee}, \wedge$

c. $[0,1]$-wertige Łukasiewicz-Logik mit $\underline{\vee}, \&$

d. vierwertige Logik von Belnap

e. $[0,1]$-Logik mit $\vee \mapsto \max$, $\wedge \mapsto \cdot$ und $\rightarrow$ wie in der Łukasiewicz-Logik