Was bisher geschah

- Daten, Information, Wissen
- explizites und implizites Wissen
- intelligente Agenten

Wissensrepräsentation und -verarbeitung:

Wissensbasis: Kontextwissen

Formulierung der Aufgabe: fallspezifisches Wissen

Lösung: Bedingungen

Lösungsverfahren

Wissensrepräsentation und -verarbeitung in Zustandsübergangssystemen:

Wissensbasis: Graph (mit Knoten- und Kantenmarkierungen)

Formulierung der Aufgabe: Weg von Startknoten zu Lösung gesucht

Lösung: Bedingungen

Lösungsverfahren: Suchverfahren

blind: Breiten-, Tiefen-, Gleiche-Kosten-Suche

informiert: Besten-, Greedy-, A*-Suche

Zwei-Personen-Spiele, MiniMax-Werte, α-β-Pruning

Wissensverarbeitung in Logiken

Ziele:

- Beantwortung von Anfragen der Form:
  (Für welche Individuen) Gilt die Aussage … unter den bekannten Voraussetzungen?
- Herleitung neuen Wissens
- Konsistenztests vorhandenen Wissens
- Konsistentes Zusammenfügen verschiedener Wissensquellen

Methoden:

- Suche nach Modellen
- semantische Methoden:
  semantisches Folgern, Wahrheitswerttabellen, Entscheidungstabellen, Entscheidungsbäume
- syntaktische Methoden:
  Schließen, Ableiten in logischen Kalkülen, Beweisen

Wissensrepräsentation durch Logiken

Anforderungen an Formalismus zur Wissensrepräsentation:

- hinreichende Ausdrucksstärke
- syntaktisch und semantisch eindeutig
- Möglichkeit der maschinellen Verarbeitung

- klassische Aussagenlogik AL(P)
  - hinreichende Ausdrucksstärke: oft ja
  - syntaktisch und semantisch eindeutig: ja
  - Möglichkeit der maschinellen Verarbeitung: ja (algorithmische Entscheidbarkeit)
- klassische Prädikatenlogik (der ersten Stufe) FOL(Σ)
  - hinreichende Ausdrucksstärke: meist ja
  - syntaktisch und semantisch eindeutig: ja
  - Möglichkeit der maschinellen Verarbeitung: meist ja (Unentscheidbarkeit)
- nichtklassische Logiken:
  - Mehrwertige Logiken, z.B.Fuzzy-Logik
  - nichtmonotone Logiken
  - Modale Logiken, z.B. Temporallogiken

Wissensrepräsentation und -verarbeitung in Logiken

Wissensbasis: Formelmenge Φ

Problemdarstellung: Formel ψ
repräsentiert die Frage:
(Für welche Variablenbelegung) Folgt ψ aus Φ?

Lösung: ja / nein, evtl. erfüllende Belegung

Lösungsverfahren:

Folgern (semantisch):
z.B. Wahrheitswerttabellen, Modellmengen

Schließen (syntaktisch):
Kalküle, z.B. Resolution

Aussagenlogik – Syntax

Junktoren Syntax: Symbole $\mathbf{t}, \mathbf{f}$ (nullstellig),
$\neg$ (einstellig), $\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$ (zweistellig)
Semantik: Wahrheitswertfunktion

Atome Syntax: Aussagenvariablen (elementare Formeln)
Semantik: Wahrheitswert

Formeln Syntax (induktive Definition):

IA: Alle Atome sind Formeln.

IS: Sind j ein n-stelliger Junktor und $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ Formeln,
dann ist auch $j(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ eine Formel.

Baumstruktur
Semantik: Boolesche Funktion

Beispiele:

- $(p \wedge (q \rightarrow r)) \vee (r \rightarrow \neg p)$
- $\neg p \wedge p$

Bedeutung der Junktoren

		Syntax	Semantik
	Stelligkeit	Symbol	Wahrheitswertfunktion
wahr	0	$\mathbf{t}$	1
falsch	0	$\mathbf{f}$	0
Konjunktion	2	$\wedge$	min
Disjunktion	2	$\vee$	max
Negation	1	$\neg$	$x \mapsto 1 - x$
Implikation	2	$\rightarrow$	$\leq$
Äquivalenz	2	$\leftrightarrow$	$=$

Aussagenlogik – Semantik

Belegung $W : P \to \{0,1\}$

Wert von $\varphi \in \mathrm{AL}(P)$ unter Belegung W: $W(\varphi)$ mit
$W(p)$ für $\varphi = p \in P$ und
induktive Berechnung für zusammengesezte Formeln

Modell (erfüllende Belegung) für $\varphi \in \mathrm{AL}(P)$:
$W : P \to \{0,1\}$ mit $W(\varphi) = 1$

Modellmenge von $\varphi \in \mathrm{AL}(P)$:
$\mathrm{Mod}(\varphi) = \{W : P \to \{0,1\} \mid W(\varphi) = 1\}$
(Boolesche Funktion, Wahrheitswerttabelle)

Erfüllbarkeit

Formel $\varphi \in \mathsf{AL}(P)$ heißt

erfüllbar gdw. $\mathrm{Mod}(\varphi) \neq \emptyset$

unerfüllbar gdw. $\mathrm{Mod}(\varphi) = \emptyset$

allgemeingültig gdw. $\mathrm{Mod}(\neg\varphi) = \emptyset$

Erfüllbarkeit (und Allgemeingültigkeit) ist algorithmisch entscheidbar.

semantisch z.B. durch Wahrheitswerttabellen

syntaktisch z.B. durch Resolution

Werkzeuge: SAT-Solver

Modellierungsbeispiel (Aussagenlogik)

1. Es wird nicht mehr viel Eis gekauft, wenn es kalt ist.
2. Der Eisverkäufer ist traurig, wenn nicht viel Eis gekauft wird.
3. Es ist kalt.

Wissensbasis: ...

Problem: ...

Lösung: ...

Lösungsverfahren: ...

neue zusätzliche Aussage (Erweiterung der Wissensbasis):

4. Der Eisverkäufer ist nicht traurig.

Semantische Äquivalenz

Relation $\equiv \subseteq \mathsf{AL}(P) \times \mathsf{AL}(P)$
(Relation zwischen zwei Formeln)

$$\varphi \equiv \psi \quad \text{gdw.} \quad \mathrm{Mod}(\varphi) = \mathrm{Mod}(\psi)$$

Beispiele:

- $p \to q \equiv \neg p \lor q$
- $p \lor q \equiv \neg p \to q$
- $p \land q \equiv \neg(p \to \neg q)$
- $p \leftrightarrow q \equiv (p \to q) \land (q \to p)$

Regeln der klassische Aussagenlogik (z.B. DeMorgan, Distributivgesetze) ermöglichen rein syntaktische äquivalente Umformungen.

Normalformen

Junktorbasen $\{\vee, \wedge, \neg\}, \{\rightarrow, \neg\}, \{\mathrm{NAND}\}, \{I, \mathbf{t}, \mathbf{f}\}$ mit

$$I(x, y, z) = (x \wedge y) \vee (\neg x \wedge z)$$

Zu jeder Formel $\varphi \in \mathrm{AL}(P)$ existieren äquivalente Formeln in

- **NNF** Formeln, in denen das Negationssymbol $\neg$ höchstens auf Atome angewendet wird
  Beispiel: $\neg p \vee ((\neg q \vee p) \wedge q)$
- **CNF** Formeln der Form $\bigwedge_{i=1}^{n} \bigvee_{j=1}^{m_i} l_{i,j}$
  mit Literalen $l_{i,j}$
  Beispiel: $(\neg p \vee \neg q) \wedge (p \vee q) \wedge \neg q$
- **DNF** Formeln der Form $\bigvee_{i=1}^{n} \bigwedge_{j=1}^{m_i} l_{i,j}$
  mit Literalen $l_{i,j}$
  Beispiel: $\neg p \vee (\neg q \wedge p) \vee (p \wedge q)$
- **NAND-NF** $\neg\varphi = \varphi \,\mathrm{NAND}\, \varphi$,
  $\varphi \wedge \psi = (\varphi \,\mathrm{NAND}\, \varphi) \,\mathrm{NAND} (\psi \,\mathrm{NAND}\, \psi)$,
- **IF-NF** $I(p, \varphi, \psi)$ mit $p \in P$, (Entscheidungsbäume)

Semantisches Folgern

Folgerungsrelation $\models \subseteq 2^{\mathrm{AL}(P)} \times \mathrm{AL}(P)$
(Relation zwischen Formelmenge und Formel)

$$\Phi \models \psi \quad \text{gdw.} \quad \mathrm{Mod}(\Phi) \subseteq \mathrm{Mod}(\psi)$$

Notation: $\models \psi$ statt $\emptyset \models \psi$ und $\varphi \models \psi$ statt $\{\varphi\} \models \psi$
Beispiele:

- $\{p\} \models p$,
- $\{p \to q, \neg q\} \models \neg p$,
- $\emptyset \models p \to p$
- $\{p, \neg p, \neg q\} \models q$

Es gilt:

$$\models \psi \quad \text{gdw.} \quad \psi \text{ allgemeingültig}$$

$$\varphi \equiv \psi \quad \text{gdw.} \quad (\varphi \models \psi \text{ und } \psi \models \varphi)$$

Semantisches Folgern

Fakt

Für jede Formelmenge $\Phi \subseteq \mathsf{AL}(P)$ *und jede Formel* $\psi \in \Phi$ *gilt* $\Phi \models \psi$.

Fakt

Für jede Formelmenge $\Phi \subseteq \mathsf{AL}(P)$ *und jede Formel* $\psi \in \mathsf{AL}(P)$ *gilt:*

$$\Phi \models \psi \quad \text{gdw.} \quad \mathrm{Mod}(\Phi) = \mathrm{Mod}(\Phi \cup \{\psi\})$$

Fakt

Für jede Formelmenge $\Phi \subseteq \mathsf{AL}(P)$ *und jede Formel* $\psi \in \mathsf{AL}(P)$ *gilt:*

$$\Phi \models \psi \quad \text{gdw.} \quad \Phi \cup \{\neg\psi\} \text{ \textit{unerfüllbar}}$$

Folgerung:

$$\Phi \models \psi \quad \text{gdw.} \quad \Phi \cup \{\neg\psi\} \models \mathbf{f}$$