Was bisher geschah

Wissensrepräsentation und -verarbeitung durch

- Künstliche Neuronale Netze (insbes. auch CNN)
- Zustandsübergangssysteme
- Klassische Logiken
- Regelsysteme in klassischer Aussagen- und Prädikatenlogik
- Logische Programme (Prolog, Datalog)
- Nichtmonotonen Schließens bei unvollständigem Wissen (closed world assumption, schwache Negation)
- Beispiele zum Planen
- Answer Set Programming

Unsicheres Wissen

Problem bei Antworten auf Fragen (Wahrheit von Fakten), falls Wert

- unbekannt
- ungenau
- unsicher, unzuverlässig
- aus mehreren Quellen zusammengefügt, evtl. widersprüchlich
- genauere Untersuchung unmöglich, zeitaufwendig, teuer

Abhilfe z.B. durch:

- Wahrscheinlichkeiten
- Vermutungen, Annahmen
- Heuristiken: Erfahrungswerte, Schätzungen

Mehrwertige Logiken

Erweiterung der klassischen Logiken mit
Wahrheitswertbereich $\{0, 1\}$
auf andere Wahrheitswertbereiche

- endlich-wertige Logiken
  z.B. 3- und 4-wertige Logiken
- fuzzy Logiken
  meist Wahrheitswertbereich $[0, 1]$
- probabilistische Logiken
  meist Wahrheitswertbereich $[0, 1]$

Dreiwertige Logiken

Annahmen aus klassischen Logiken:

A1 Jede Aussage ist wahr oder falsch.

A2 Keine Aussage ist sowohl wahr als auch falsch.

Bei unvollständigem Wissen gilt A1 nicht.

Dreiwertigen Logiken enthalten deshalb einen zusätzlichen Wahrheitswert für „unbekannt“,
Wahrheitswertbereich meist $\{0, \perp, 1\}$ (auch $\{0, U, 1\}$, $\{0, 1/2, 1\}$)
mit zwei Ordnungen:

- Wahrheits-Ordnung: $0 <_W \perp <_W 1$ (total)
- Informations-Ordnung: $\perp <_I 0$ und $\perp <_I 1$ (partiell)

prominente dreiwertige Logiken,
z.B. von Belnap, Peirce, Łukasiewicz, Gödel, Kleene
unterscheiden sich in Wahrheitswertfunktionen der Junktoren

Beispiel: Dreiwertige Łukasiewicz-Logik

Jan Łukasiewicz and A. Tarski (1930):
Untersuchungen über den Aussagenkalkül
Semantik ist definiert über die Wahrheitswertfunktion der Implikation
Semantik im Wahrheitswertbereich $\{0, 1/2, 1\}$ (und auch in $[0, 1]$):

$$\begin{aligned}
[\![\mathbf{f}]\!] &= 0 \\
[\![\varphi \rightarrow \psi]\!] &= \min(1, 1 - [\![\varphi]\!] + [\![\psi]\!]) = \begin{cases} 1 & \text{falls } [\![\varphi]\!] \leq [\![\psi]\!] \\ 1/2 & \text{falls } [\![\varphi]\!] - [\![\psi]\!] = 1/2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}
\end{aligned}$$

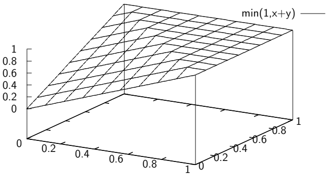
definierte Junktoren:

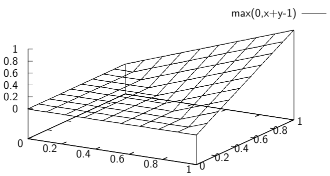
$$\begin{aligned}
\neg\varphi &:= \varphi \rightarrow \mathbf{f} \\
\varphi \veebar \psi &:= \neg\varphi \rightarrow \psi && \text{(starke Disjunktion)} \\
\varphi \,\&\, \psi &:= \neg(\varphi \rightarrow \neg\psi) && \text{(starke Konjunktion)} \\
\varphi \vee \psi &:= (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \psi && \text{(schwache Disjunktion)} \\
\varphi \wedge \psi &:= \varphi \,\&(\varphi \rightarrow \psi) && \text{(schwache Konjunktion)}
\end{aligned}$$

Łukasiewicz-Logik: Wahrheitswertfunktionen

Aus der Definition der Junktoren lassen sich deren Wahrheitswertfunktionen berechnen:

$$
\begin{aligned}
\neg x &= 1 - x \\
x \rightarrow y &= \min(1, 1 - x + y) \\
x \vee y &= \max(x, y) \\
x \wedge y &= \min(x, y) \\
x \veebar y &= \min\{1, x + y\} \\
x \mathbin{\&} y &= \max\{0, x + y - 1\} \\
x \leftrightarrow y &= 1 - |x - y|
\end{aligned}
$$





Semantik in dreiwertiger Łukasiewicz-Logik

Wahrheitswerttabellen:

$\neg$	0	1/2	1
	1	1/2	**0**

$\rightarrow$	0	1/2	1
0	**1**	1	**1**
1/2	1/2	1	1
1	**0**	1/2	**1**

$\wedge$	0	1/2	1
0	**0**	0	**0**
1/2	0	1/2	1/2
1	**0**	1/2	**1**

$\vee$	0	1/2	1
0	**0**	1/2	**1**
1/2	1/2	1/2	1
1	**1**	1	**1**

&	0	1/2	1
0	**0**	0	**0**
1/2	0	0	1/2
1	**0**	1/2	**1**

$\underline{\vee}$	0	1/2	1
0	**0**	1/2	**01**
1/2	1/2	1	1
1	**1**	1	**1**

Mehrwertige Łukasiewicz-Logik

Die Wahrheitswertfunktionen der dreiwertigen Łukasiewicz-Logik sind auf dem ganzen Intervall $[0, 1]$ (und Teilmengen davon) definiert.
Semantik in $[0, 1] \subseteq \mathbb{R}$ (bzw. geeigneten Teilmengen davon)

$$\begin{aligned} [\![\mathbf{f}]\!] &:= 0 \\ [\![\varphi \to \psi]\!] &:= \min(1, 1 - [\![\varphi]\!] + [\![\psi]\!]) \end{aligned}$$

Definition der abgeleiteten Junktoren wie in der dreiwertigen Łukasiewicz-Logik.

zweiwertige Łukasiewicz-Logik:
Bei Einschränkung der Wahrheitswertfunktionen auf die Menge $\{0, 1\}$

- stimmen die Werte für schwache und starke Konjunktion überein,
- stimmen die Werte für schwache und starke Disjunktion überein,
- ergibt sich genau die klassische zweiwertige Logik.

Klassische zweiwertige Logik ist also ein Spezialfall
($=$ zweiwertige Łukasiewicz-Logik)

Mehrwertige (Aussagen-)Logiken

Aussagenlogik $\mathrm{PL}(P, \mathbb{W})$ mit Parametern

P Aussagenvariablen

$\mathbb{W}$ Wahrheitswert-Bereich (algebraische Struktur)
$\mathbb{W} = (W, \ldots)$
meist mit $W \subseteq [0, 1]$

mit Symbolen und Wahrheitswertfunktionen für

- ein- und mehrstellige Junktoren, z.B. $\neg, \vee, \wedge, \ldots$
- nullstelligen Junktoren (Wahrheitswertkonstanten) für jedes Element (einer Teilmenge) von $\mathbb{W}$, wenigstens aber 0 und 1

für Prädikatenlogiken außerdem zu definieren:
Symbole und Wahrheitswertfunktionen für Quantoren

Mehrwertige Łukasiewicz-Logik(en)

Syntax:

Wahrheitswertkonstanten syntaktische Repräsentanten der Elemente in $\mathbb{W}$

Aussagenvariablen P

Junktoren $\neg, \&, \veebar$ (stark), $\vee, \wedge$ (schwach)
Wahrheitswertkontanten $c \in W$ (nullstellig),

Formeln $\varphi ::= p \mid \neg\varphi \mid \varphi * \psi \mid c$
mit Aussagenvariablen $p \in P$,
$* \in \{\&, \veebar, \vee, \wedge\}$, Formeln φ, ψ und
Wahrheitswertkontanten $c \in W$

NNF $\varphi ::= p \mid \neg p \mid \varphi * \psi \mid c$

Semantik von Formeln definiert entsprechend der Wahrheitswertfunktionen auf $\mathbb{W}$

Fuzzy-Logiken

Fuzzy-Logik: Sammelbegriff für verschiedene Logiken,
meist mit

- Wahrheitswertbereich $[0,1] \subseteq \mathbb{R}$ (oder Teilmenge davon)
- $\neg x \mapsto 1 - x$
- Wahrheitswertkonstanten 0 und 1

und definiert über Wahrheitswertfunktionen für andere Junktoren,
oft $\wedge$, $\vee$ oder $\rightarrow$

Beispiele:

- Standard-Fuzzy-Logik: $\wedge \mapsto \min$, $\vee \mapsto \max$
- Produkt-Logik: $x \wedge y \mapsto xy$
- Łukasiewicz-Logik: $x \rightarrow y \mapsto \min(1, 1 - x + y)$