Wissensrepräsentation durch Logiken

Klassische Logiken:

- Aussagenlogik:
  Repräsentation einfacher und zusammengesetzter Aussagen
- Prädikatenlogik:
  Wissen über Eigenschaften von und Beziehungen zwischen Objekten eines Bereiches

Prinzipien der klassischen Logik:

Zweiwertigkeit Jede Aussage ist wahr oder falsch.

ausgeschlossener Widerspruch Keine Aussage ist sowohl wahr als auch falsch.

Nichtklassische Logiken

- Nichtmonotone Logiken:
  unvollständiges Wissen
- mehrwertige Logiken:
  unsicheres und unscharfes Wissen
- Modallogiken:
  Wissen über verschiedene mögliche Welten (Zustände)
  Wissen über Wissen (z.B. verschiedener Agenten)
- Temporallogiken:
  Wissen über zeitliche Zusammenhänge
  (Zustandsübergangssysteme)
- Beschreibungslogiken:
  Wissen über Begriffe und Zusammenhänge zwischen diesen

Wissensverarbeitung in Logiken

Ziele:

- Beantwortung von Anfragen der Form:
  (Für welche Individuen) Gilt die Aussage … unter den bekannten Voraussetzungen?
- Herleitung neuen Wissens
- Konsistenztests vorhandenen Wissens
- Konsistentes Zusammenfügen verschiedener Wissensquellen

Methoden:

- Suche nach Modellen
- semantische Methoden:
  semantisches Folgern, Wahrheitswerttabellen, Entscheidungstabellen, Entscheidungsbäume
- syntaktische Methoden:
  Schließen, Ableiten in logischen Kalkülen, Beweisen

Wissensrepräsentation und -verarbeitung in Logiken

Wissensbasis (Aufgabenbereich): Formelmenge Φ

Aufgabe Formel ψ
Fragestellung: Folgt ψ aus Φ?

Lösung
- ja / nein
- falls ja, evtl. Modell

Möglichkeiten zum Ableiten neuen Wissens (Formel) aus einer Wissensbasis (Formelmenge)

Folgern (semantisch), z.B. Wahrheitswerttabellen

Schließen (syntaktisch): Kalküle

Beispiel

Wissensbasis Wenn der Zug zu spät kommt und kein Taxi am Bahnhof steht, ist Tom nicht pünktlich.
Der Zug kam zu spät und Tom ist pünktlich.
Modellierung:
z – Zugverspätung, t – Taxi da, p – pünktlich
$\Phi = \{z \wedge \neg t \rightarrow \neg p, z \wedge p\}$

Problem Stand ein Taxi am Bahnhof? $\psi = t$
Folgt ψ aus Φ?

Lösung ...

Wiederholung Aussagenlogik: Syntax

		Syntax	Semantik
		Symbol	Wahrheitswertfunktion
Junktoren	wahr	**t**	1
	falsch	**f**	0
	Konjunktion	$\wedge$	min
	Disjunktion	$\vee$	max
	Negation	$\neg$	$x \mapsto 1 - x$
	Implikation	$\rightarrow$	$\leq$
	Äquivalenz	$\leftrightarrow$	$=$

Atome Syntax: elementare Formeln
Semantik: Wahrheitswert

Literal Atom oder negiertes Atom

Klausel Disjunktion von Literalen

Formeln Syntax (induktive Definition): $\mathrm{AL}(P)$

IA: Alle Atome sind Formeln. $P \subset \mathrm{AL}(P)$

IS: $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in \mathrm{AL}(P) \rightarrow j(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) \in \mathrm{AL}(P)$

Semantik: Boolesche Funktion

Wiederholung Aussagenlogik: Semantik

Belegung $W : P \to \{0,1\}$

Wert von $\varphi \in \mathrm{AL}(P)$ unter Belegung W:

- $W(\varphi) = W(p)$ für $\varphi = p \in P$,
- induktive Berechnung von $W(\varphi)$ für zusammengesetzte Formeln φ

Modell (erfüllende Belegung) für $\varphi \in \mathrm{AL}(P)$:
$W : P \to \{0,1\}$ mit $W(\varphi) = 1$

Modellmenge von $\varphi \in \mathrm{AL}(P)$:
$\mathrm{Mod}(\varphi) = \{W : P \to \{0,1\} \mid W(\varphi) = 1\}$
(Boolesche Funktion, Wahrheitswerttabelle)

Erfüllbarkeit

Formel $\varphi \in \mathsf{AL}(P)$ heißt

erfüllbar gdw. $\mathsf{Mod}(\varphi) \neq \emptyset$

unerfüllbar gdw. $\mathsf{Mod}(\varphi) = \emptyset$

allgemeingültig gdw. $\mathsf{Mod}(\neg\varphi) = \emptyset$

Erfüllbarkeit ist algorithmisch entscheidbar.

semantisch z.B. durch Wahrheitswerttabellen

syntaktisch durch Ableitung in Kalkülen

Werkzeuge: SAT-Solver

Normalformen

Junktorbasen $\{\vee, \wedge, \neg\}, \{\wedge, \neg\}, \{\rightarrow, \neg\}, \{\rightarrow, \mathbf{f}\}, \{\mathrm{NAND}\}$

DNF $\bigvee_{i=1}^{n} \bigwedge_{j=1}^{m_j} l_{ij}$ mit Literalen (Atome oder negierte Atome) l_{ij}

CNF $\bigwedge_{i=1}^{n} \bigvee_{j=1}^{m_j} l_{ij}$ mit Literalen (Atome oder negierte Atome) l_{ij}

NAND-NF $\neg\varphi \equiv \varphi \,\mathrm{NAND}\, \varphi$

$\varphi \wedge \psi \equiv (\varphi \,\mathrm{NAND}\, \psi) \,\mathrm{NAND} (\varphi \,\mathrm{NAND}\, \psi)$

Semantisches Folgern

$\psi \in \mathrm{AL}(P)$ heißt genau dann (semantische) Folgerung aus $\Phi \subseteq \mathrm{AL}(P)$, wenn jedes Modell für Φ auch ein Modell für ψ ist.

Kurzform:

$$\Phi \models \psi \quad \text{gdw.} \quad \mathrm{Mod}(\Phi) \subseteq \mathrm{Mod}(\psi)$$

Beispiele:

- $\{p, p \to q\} \models q$
- $\{p, \neg(q \wedge p)\} \models \neg q$
- $\{p\} \models q \to p$
- $\{q \to p\} \not\models p$
- $\emptyset \models p \vee \neg p$
- $p \wedge \neg p \models q$

Folgerungsrelation

Folgerungsrelation:
zweistellige Relation $\models \subseteq 2^{\mathsf{AL}(P)} \times \mathsf{AL}(P)$

Spezialfälle der Notation:

für $\Phi = \{\varphi\}$: $\varphi \models \psi$ (statt $\{\varphi\} \models \psi$)
für $\Phi = \emptyset$: $\models \psi$ (statt $\emptyset \models \psi$)

Fakt
Für jede Formel $\varphi \in \mathsf{AL}(P)$ gilt $\models \varphi$ genau dann, wenn φ allgemeingültig ist.

Sätze über das Folgern

- Für endliche Formelmengen $\Phi = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ gilt

$$\Phi \models \psi \quad \text{genau dann, wenn} \quad \bigwedge_{i=1}^{n} \varphi_i \models \psi$$

- $\varphi \equiv \psi$ gdw. $\varphi \models \psi$ und $\psi \models \varphi$

Für jede Formelmenge $\Phi \subseteq \mathsf{AL}(P)$ und jede Formel $\psi \in \mathsf{AL}(P)$ gilt:

- falls $\psi \in \Phi$ gilt $\Phi \models \psi$.
- $\Phi \models \psi$ gdw. $\mathrm{Mod}(\Phi) = \mathrm{Mod}(\Phi \cup \{\psi\})$
- $\Phi \models \psi$ gdw. $\Phi \cup \{\neg\psi\}$ unerfüllbar
- $\Phi \models \psi$ gdw. $\Phi \cup \{\neg\psi\} \models \mathbf{f}$

Syntaktisches Schließen

gegeben: Formelmenge Φ
Formel ψ
Frage : Gilt $\Phi \models \psi$?

Ziel: Verfahren zur Beantwortung dieser Frage durch syntaktische Operationen
(ohne Benutzung der Semantik, Modellmengen)

Syntaktische Ableitungsrelation $\vdash \subseteq 2^{\mathsf{AL}(P)} \times \mathsf{AL}(P)$
passend zur
semantischen Folgerungsrelation $\models \subseteq 2^{\mathsf{AL}(P)} \times \mathsf{AL}(P)$

$\vdash$ passt zu $\models$, falls für jede Formelmenge $\Phi \in \mathsf{AL}(P)$ und jede Formel $\psi \in \mathsf{AL}(P)$ gilt

$$\Phi \vdash \psi \quad \text{gdw.} \quad \Phi \models \psi$$

Kalküle

gegeben: aussagenlogische Formel $\varphi \in \mathrm{AL}(P)$
Frage: Ist φ allgemeingültig?

Lösungsansätze:

- φ ist allgemeingültig gdw. $\varphi \equiv \mathbf{t}$.

  Syntaktische (äquivalente) Umformungen von $\mathbf{t}$ zu φ.

  Simulation des mathematischen Schließens (Hilbert-Kalkül)

- φ ist allgemeingültig gdw. $\neg\varphi$ unerfüllbar.

  Erfüllbarkeitstest für $\neg\varphi$, z.B. mit SAT-Solver

Kalkül: Menge von Schlussregeln zur syntaktischen Umformung von Formeln
(Repräsentation von Mengen von Schlussregeln durch Regelschemata)
Kalkül K ist sinnvoll, wenn man zeigen kann:

Korrektheit: Jede in K ableitbare Formel ist allgemeingültig.

Vollständigkeit: Jede allgemeingültige Formel ist in K ableitbar.

Ableitung im Kalkül K

Definition (induktiv)

Die Menge aller im Kalkül K aus einer Formelmenge $\Phi \subseteq \mathrm{AL}(P)$ ableitbaren Formeln ist definiert durch:

1. Alle Formeln in Φ sind in K aus Φ ableitbar.
2. Alle Axiome in K sind in K aus Φ ableitbar.
   (Axiome sind nullstellige Schlussregeln)
3. Sind $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ in K aus Φ ableitbar und ist $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \psi)$ eine Schlussregel in K, dann ist auch ψ in K aus Φ ableitbar.

Ableitungsbaum (Beweisbaum):
Blätter: Axiome und Voraussetzungen in Φ
innere Knoten: Schlussregeln (Instanzen von Regelschemata)

In K aus $\emptyset$ ableitbare Formeln heißen in K beweisbar.

Beispiel

Im einfachen Kalkül mit Axiomenschema $A \to A$ und Regelschema

$$\frac{A \qquad B}{A \wedge B}$$

sind aus $\Phi = \emptyset$ alle Formeln der Form $\bigwedge_{i=1}^{n}(\varphi_i \to \varphi_i)$ mit $\varphi_i \in \mathrm{AL}(P)$ ableitbar.

Beispiele:

- $(p \to p)$
- $(p \to p) \wedge (q \to q)$
- $((p \to p) \wedge (q \to q)) \wedge ((p \to p) \wedge (q \to q))$

Aussagenlogische Resolution

Formeln $p \vee \psi, \neg p \vee \eta$ haben die Resolvente $\psi \vee \eta$

Satz (Resolutionslemma)

Für jede CNF (Klauselmenge) Φ und die Resolvente R zweier Klauseln aus Φ gilt

$$\mathrm{Mod}(\Phi) = \mathrm{Mod}(\Phi \cup \{R\})$$

Idee: Schrittweise Erweiterung der Formelmenge Φ um Resolventen

Anwendung der Resolutionsregel:

$$\{\psi \vee p, \neg p \vee \eta\} \to \{\psi \vee p, \neg p \vee \eta, \psi \vee \eta\}$$

alternative Darstellung:

$$\{\neg\psi \to p, p \to \eta\} \to \{\neg\psi \to p, p \to \eta, \neg\psi \to \eta\}$$

Spezialfall: endliche Menge Φ von Formeln in CNF

Ableitungen durch Resolution

Resolutionsableitung aus einer Klauselmenge Φ (CNF):
endliche Folge $C_1, \ldots C_n$ von Klauseln, wobei für jede Klausel C_i gilt:

- $C_i \in \Phi$ oder
- C_i ist eine Resolvente von Klauseln C_j, C_k mit $j < i$ und $k < i$.

Resolutionsableitung der Klausel ψ aus Klauselmenge Φ:
Resolutionsableitung $C_1, \ldots C_n$ in Φ mit $C_n = \psi$

Beispiel: Resolutionsableitung von d aus

$$\Phi = \{a \vee b \vee c, \neg b \vee d, \neg a \vee d, \neg c \vee d\}$$

Baumdarstellung (Tafel)

Resolutionsableitungen von **f**

Problem:
Es existiert keine Resolutionsableitung von $\neg a \vee \neg b \vee d$ aus

$$\Phi = \{a \vee b \vee c, \neg b \vee d, \neg a \vee d, \neg c \vee d\}$$

aber es gilt $\Phi \models \neg a \vee \neg b \vee d$.

Lösungsidee:
Es gilt $\Phi \models \psi$ gdw. $\Phi \cup \{\neg\psi\}$ unerfüllbar.

Unerfüllbarkeitsbeweis für $\Phi \cup \{\psi\}$ durch Resolutionsableitung von **f** aus $\Phi \cup \{\neg\psi\}$ (Klauselform)

Beispiel (Tafel): Resolutionsableitung von **f** aus

$$\Phi \cup \{\neg\psi\} = \{a \vee b \vee c, \neg b \vee d, \neg a \vee d, \neg c \vee d, a, b, \neg d\}$$

Syntaktische Ableitungsrelation $\vdash_R$

Schon gezeigt:
Für jede Formelmenge $\Phi \subseteq \mathrm{AL}(P)$ und jede Formel $\psi \in \mathrm{AL}(P)$ gilt:

$$\Phi \models \psi \quad \text{gdw.} \quad \Phi \cup \{\neg\psi\} \text{ unerfüllbar}$$

Syntaktische Ableitungsrelation $\vdash_R \subseteq 2^{\mathrm{AL}(P)} \times \mathrm{AL}(P)$:
$\Phi \vdash_R \psi$ gdw.
eine Resolutionsableitung für **f** aus $\Phi \cup \{\neg\psi\}$ existiert.

Beispiele:

- $\{a \vee b \vee c, (a \vee b) \rightarrow d, c \rightarrow e, \neg d\} \vdash_R e$
- $(\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee r) \wedge p \wedge \neg r$ ist unerfüllbar.
- $\phi = (q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee p \vee (\neg p \wedge \neg r)$ ist allgemeingültig.

Korrektheit und Vollständigkeit

Die folgenden beiden Sätze zeigen, dass $\vdash_R$ zu $\models$ passt, d.h.
$\Phi \vdash_R \psi$ gdw. $\Phi \models \psi$

Satz (Korrektheit der Ableitungsrelation $\vdash_R$)

Für jede Formelmenge $\Phi \subseteq \mathsf{AL}(P)$ und jede Formel $\psi \in \mathsf{AL}(P)$ gilt:
Aus $\Phi \vdash_R \psi$ folgt $\Phi \models \psi$
(Wenn eine Resolutionsableitung von **f** *aus einer zu $\Phi \cup \{\neg\psi\}$ äquivalenten Klauselmenge existiert, dann gilt $\Phi \models \psi$.)*

Satz (Vollständigkeit der Ableitungsrelation $\vdash_R$)

Für jede Formelmenge $\Phi \subseteq \mathsf{AL}(P)$ und jede Formel $\psi \in \mathsf{AL}(P)$ gilt:
Aus $\Phi \models \psi$ folgt $\Phi \vdash_R \psi$
(Wenn $\Phi \models \psi$ gilt, dann existiert eine Resolutionsableitung von **f** *aus einer zu $\Phi \cup \{\neg\psi\}$ äquivalenten Klauselmenge.)*