Was bisher geschah

- digitales Bild = Funktion $B : \text{pos} \to \text{col}$
- statistische Merkmale (Bildanalyse)
  und ihre Aussagen über das Bild
- Punktoperationen $f : \text{col}_1 \to \text{col}_2$ (Farbtransformation)
  und ihre Fortsetzung $f : \text{col}_1^{\text{pos}} \to \text{col}_2^{\text{pos}}$
- Geometrische Operationen $f : \text{pos}_1 \to \text{pos}_2$
  (Koordinatentransformation)

eindimensionale Signale $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

- Dirac-Impuls, Dirac-Kamm, Abstast-Funktion
- Digitalisierung $f' : \text{pos} \to \mathbb{R}$
- Alias-Effekte
- Nyquist-Shannon-Abtasttheorem

Zusammenfassung Abtastung 1D

Transformation einer stetigen Funktion $B : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (analoges Signal)
in eine Funktion $B' : \text{pos} \to \mathbb{R}$ (diskretes Signal)
mathematische Beschreibung dieser Transformation durch
Funktion(al) $f_{\text{pos}} : (\mathbb{R} \to \mathbb{R}) \to (\text{pos} \to \mathbb{R})$

Dirac-Impuls $\delta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = 1 \quad \text{und} \quad \forall x \in \mathbb{R} : x \neq 0 \to \delta(x) = 0$$

Dirac-Kamm δ_{pos} an Abtaststellen $\text{pos} \subset \mathbb{R}$:
$\forall x \in \mathbb{R} : \delta_{\text{pos}}(x) = \sum_{p \in \text{pos}} \delta(p - x)$

abgetastetes Signal $f_{\text{pos}}(B)$ an Abtaststellen $\text{pos} \subset \mathbb{R}$: $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$(f_{\text{pos}}(B))(x) = \int_{-\infty}^{\infty} B(x)\delta_{\text{pos}}(x)dx = \sum_{p \in \text{pos}} \int_{-\infty}^{\infty} B(x)\delta(p-x)dx$$

Abtasttheorem (Nyquist-Shannon): Zur verlustfreien Rekonstruktion darf das Abtastraster (Abstand zwischen benachbarten Abtast-Positionen) nicht gröber sein als die halbe Größe des kleinsten abzubildenden Details.

Wiederholung: Faltung (1D)

Verschiebung eines Dirac-Impulses um p entlang der x-Achse:

$$\int_{-\infty}^{\infty} B(x+p)\delta(x)dx \quad = \quad \int_{-\infty}^{\infty} B(x)\delta(p-x)dx = (B * \delta)(p)$$

ist Spezialfall einer Operation mit zwei Funktionen:

Für $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist die Faltung (Convolution) von f und g definiert durch

$$\forall p \in \mathbb{R} : (f * g)(p) = \int_{-\infty}^{\infty} f(p-x)g(x)dx$$

Faltung – Beispiel

$$f(x) = \chi_{[-1,1]} = \begin{cases} 1 & \text{falls } -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$g(x) = 2\chi_{[0,2]} = \begin{cases} 2 & \text{falls } 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$(f*g)(p) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(p-x)dx = \int_{-1}^{1} g(p-x)dx = \max(0, 4-2|p-1|)$$

an Stellen $p \in \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ berechnen (Tafel):

$(f*g)(-2) = (f*g)(-1) = 0, (f*g)(0) = 2, (f*g)(1) = 4, (f*g)(2) = 2, \ldots$

anschaulich:

1. Spiegelung von g an y-Achse
2. gespiegeltes g wird entlang der x-Achse um p verschoben
3. $(f * g)(p)$ ist der Flächeninhalt der vom Produkt beider Funktionen überdeckten Fläche

Faltung – Eigenschaften

- kommutativ, d.h. $\forall f, g : f * g = g * f$
- assoziativ, d.h. $\forall f, g, h : (f * g) * h = f * (g * h)$
- Dirac-Impuls δ ist neutrales Element bzgl. $*$:
  Für jede Funktion $B : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt

  $$\forall x \in \mathbb{R} : (B * \delta)(p) = \int_{-\infty}^{\infty} B(x)\delta(p - x)dx = B(p)$$

  also $B * \delta = B$
- für verschobenen Dirac-Impuls δ_p mit
  $\forall x \in \mathbb{R} : \delta_p(x) = \delta(p - x)$ und
  jede Funktion $B : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt

  $$\forall x \in \mathbb{R} : (B * \delta_p)(x) = B(p - x)$$

- bilinear, d.h. linear in jeder Komponente
  $(af + bf') * g = a(f * g) + b(f' * g)$ (analog für $ag + bg'$)

Diskrete Faltung

stetig:

Für $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist die Faltung von f und g definiert durch

$$\forall p \in \mathbb{R} : (f * g)(p) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(p-x)dx$$

diskret:

Für $f, g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ ist die Faltung (Convolution) von f und g definiert durch

$$\forall p \in \mathbb{Z} : (f * g)(p) = \sum_{x=-\infty}^{\infty} f(x)g(p-x)$$

diskret mit endlichem Definitionsbereich pos:

Für $f, g : \text{pos} \to \mathbb{Z}$ ist die Faltung (Convolution) von f und g definiert durch

$$\forall p \in \text{pos} : (f * g)(p) = \sum_{x \in \text{pos}} f(x)g(p-x)$$

Diskrete Faltung – Beispiel

$f, g : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 3 & \text{falls } x = 1 \\ 1 & \text{falls } x = 2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 2 & \text{falls } x = 1 \\ 1 & \text{falls } x = 2\} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

als Vektoren mit endlichem Definitionsbereich $\text{pos} = \{0, \ldots, 3\}$:
$f = (0, 3, 1, 0)$, $g = (0, 2, 1, 0)$

$$(f * g)(p) = \begin{cases} 6 & \text{falls } p = 2 \\ 5 & \text{falls } p = 3 \\ 1 & \text{falls } p = 4 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

als Vektor: $f * g = (0, 6, 5, 1)$ (relevanter Teil)

Zweidimensionale Signale

analog : Funktion $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

digital : Funktion pos $\to$ col mit col $\subseteq \mathbb{N}$ und pos $\subseteq \mathbb{N}^2$, meist
pos $= \{0, \ldots, m-1\} \times$ pos $= \{0, \ldots, n-1\} \subseteq \mathbb{N}^2$
und col $= \{0, \ldots, k-1\} \subseteq \mathbb{N}$
(Matrix natürlicher Zahlen, Bilder)

Abtastung (2D)

Transformation eines Signals mit stetigem Definitionsbereich in ein Signal mit diskretem Definitionsbereich (Raster)

gegeben: Funktion $B : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

gesucht: Funktion $B' : \text{pos} \to \mathbb{R}$ mit $\text{pos} = \{0, \dots, m-1\} \times \{0, \dots, n-1\}$

Transformation $f : (\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}) \to (\text{pos} \to \mathbb{R})$ mit $\forall B : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\ \forall p = (p_x, p_y) \in \text{pos} :$

$$f(B)(p_x, p_y) = \begin{cases} B(p_x, p_y) & \text{falls } (p_x, p_y) \in \text{pos} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Realisierung durch Multiplikation von B mit Dirac-Impulsen $\delta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x, y) dx dy = 1 \quad \text{und}$$

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y) \neq (0, 0) \to \delta(x) = 0$$

Dirac-Kamm (2D)

Dirac-Impuls $\delta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x,y)dxdy = 1 \text{ und } \forall(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y) \neq (0,0) \to \delta(x,y) = 0$$

Verschiebung in der Ebene um $(p_x, p_y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} B(x+p_x, y+p_y)\delta(x,y)dxdy \\ = \quad & \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} B(x,y)\delta(p_x - x, p_y - y)dxdy \\ = \quad & B(p_x, p_y) \end{aligned}$$

2D-Dirac-Kamm: Summe mehrerer verschobener Dirac-Impulse

$$\forall(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \delta_{\text{pos}}(x,y) = \sum_{p=(p_x,p_y)\in \text{pos}} \delta(p_x - x, p_y - y)$$

Abtastung der Funktion $B : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ an den Stellen pos $\subseteq \mathbb{R}^2$:

$$\forall(x,y) \in \text{pos} : B'(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} B(x,y)\delta_{\text{pos}}(x,y)dxdy = B(x,y)$$

Faltung (2D)

Für $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ist die Faltung (Convolution) von f und g definiert durch

$$\forall (p_x, p_y) \in \mathbb{R}^2 : (f{*}g)(p_x, p_y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) g(p_x{-}x, p_y{-}y) dxdy$$

diskreter Fall (Bilder):
Für $f, g : \{0, \ldots, m-1\} \times \{0, \ldots, m-1\} \to$ col ist die Faltung (Convolution) von f und g definiert durch
$\forall (p_x, p_y) \in \{0, \ldots, m-1\} \times \{0, \ldots, m-1\}$:

$$(f * g)(p_x, p_y) = \sum_{x=0}^{m-1} \sum_{y=0}^{n-1} f(x, y) g(p_x - x, p_y - y)$$

Transformation stetiger Signale

bisher:

- Diskretisierte Funktion f : pos $\to$ col als Linearkombinationen (gewichtete Summe) von verschobenen Dirac-Impulsen $\delta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (bilden Basis)
- Transformationen durch Operationen auf

  col : (punktweise) Farbtransformationen

  pos : geometrisch (Verschiebung, Skalierung,. . .)

alternativ:

- Beschreibung von Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ als Linearkombinationen (gewichtete Summe) festgelegter (stetiger) Basisfunktionen $g_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (geeignet skaliert und verschoben)

$$\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = \sum_{i \in I} a_i g_i(x)$$

- Darstellung von Bildern als Linearkombinationen (stetiger) „Basisbilder“ (evtl. skaliert, verschoben und rotiert)
- Transformationen durch Operationen auf den Koeffizienten a_i der Standardfunktionen

Periodische Funktionen (1D, Wiederholung)

Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt periodisch gdw.

$$\exists p \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R}\ \forall i \in \mathbb{Z} : f(x) = f(x + ip)$$

$p \in \mathbb{R}$ heißt Periode von f

Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt

- **gerade** gdw. $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = f(-x)$
  (Symmetrie an y-Achse)
  z.B. $x \mapsto x^2, x \mapsto \cos(x)$
- **ungerade** gdw. $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = -f(-x)$
  z.B. $x \mapsto x^3, x \mapsto \sin(x)$

Fourierreihe (1D) – Wiederholung

Darstellung von (periodischen) Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
als Linearkombination (gewichtete Summe)
periodischer zueinander orthogonaler „Standard“-Funktionen
mit Perioden $p_k = \frac{2\pi k}{p}$ für Periode p von f und alle $k \in \mathbb{Z}$.
Für Fourierreihen trigonometrische Funktionen mit Periode 2π

cos	gerader Anteil
sin	ungerader Anteil

$$\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\right)$$

mit Koeffizienten $a_k, b_k \in \mathbb{R}$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(kx) dx \quad \left(\text{insbesondere } a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx\right)$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(kx) dx$$

Beispiel: cos

Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = 3\cos(2x)$$

$$\forall x \in \mathbb{R} : 3\cos(2x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos\left(kx\right) + b_k \sin\left(kx\right)\right)$$

mit Koeffizienten:
$a_2 = 3$,
$\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{2\} : a_k = 0$,
$\forall k \in \mathbb{N} : b_k = 0$

Beispiel: Stufenfunktion (Rechteck)

Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$\forall x \in \mathbb{R} : \; f(x) = \begin{cases} \;\;1 & \text{falls } \exists k \in \mathbb{Z} : x \in [2k\pi, (2k+1)\pi) \\ -1 & \text{falls } \exists k \in \mathbb{Z} : x \in [(2k-1)\pi, 2k\pi) \end{cases}$$

(stückweise konstante Funktion mit Periode 2π)

$$\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) \right)$$

mit Koeffizienten $\forall k \in \mathbb{N} : a_k = 0$,

$$\forall k \in \mathbb{N} : b_k \quad = \quad \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(kx) dx = \begin{cases} \frac{4}{k\pi} & \text{falls } k \equiv 1 \pmod 2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

also

$$\forall x \in \mathbb{R} : f(x) \quad = \quad \frac{4}{\pi} \sum_{\substack{k \in \mathbb{N} \\ k \equiv 1 \pmod 2}} \frac{\sin(kx)}{k}$$