Was bisher geschah

- digitale Bilder:
  - Funktion $B : \text{pos} \to \text{col}$
  - Matrix $B \in \text{col}^{\text{pos}}$
- statistische Merkmale (Bildanalyse)
  und ihre Aussagen über das Bild
- Punktoperationen $f : \text{col}_1 \to \text{col}_2$ (Farbtransformation)
  und ihre Fortsetzung $f : \text{col}_1^{\text{pos}} \to \text{col}_2^{\text{pos}}$

  $$\forall p \in \text{pos} : f(B)(p) = f(B(p))$$

  - Intensitäts-, Kontrasterhöhung
  - Histogrammstreckung
  - Binarisierung
- Geometrische Operationen $f : \text{pos}_1 \to \text{pos}_2$
  (Koordinatentransformation)
  - Verschiebung, Skalierung, Drehung
  - affine Abbildungen

Bestimmung affiner Transformationen

gegeben: Zuordnung $\{(p_1, q_1), \ldots, (p_n, q_n)\}$ zwischen Positionen
$\{p_1, \ldots, p_n\} \in \text{pos}(B)$ im Bild B und
$\{q_1, \ldots, q_n\} \in \text{pos}(A)$ im Original A

gesucht: Beschreibung der Transformation $A \mapsto B$ durch Matrix
M mit $\forall i \in \{1, \ldots, n\} : M(q_i) = p_i$

$$M = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & v_1 \\ b_1 & b_2 & v_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

d.h. gesucht sind die sechs Koeffizienten $a_1, a_2, b_1, b_2, v_1, v_2$ mit

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\} : \quad M \begin{pmatrix} q_{i1} \\ q_{i2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{i1} \\ p_{i2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

als lineares Gleichungssystem mit Unbekannten $a_1, a_2, b_1, b_2, v_1, v_2$:

$$\begin{aligned} q_{i1} a_1 + q_{i2} a_2 + v_1 &= p_{i1} \\ q_{i1} b_1 + q_{i2} b_2 + v_2 &= p_{i2} \end{aligned}$$

eindeutig lösbar für sechs Gleichungen
= drei (nicht kollineare) Referenzpunkte

Beispiel

Gesucht ist die affine Transformation $M = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & v_1 \\ b_1 & b_2 & v_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, welche die folgenden Punkte aufeinander abbildet:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Gleichungssystem

$$a_2 + v_1 = -1 \tag{7}$$
$$b_2 + v_2 = -1 \tag{8}$$
$$a_1 + a_2 + v_1 = 0 \tag{9}$$
$$b_1 + b_2 + v_2 = 0 \tag{10}$$
$$a_1 + v_1 = 2 \tag{11}$$
$$b_1 + v_2 = -1 \tag{12}$$

(3)$-$(1): $a_1 = 1$, (4)$-$(2): $b_1 = 1, \ldots$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Projektive Abbildungen

(z.B. zur Lokalisierung autonomer Fahrzeuge aus perspektivische Abbildungen, Verkehrsszenen)

Projektive Abbildung mit

- affiner Transformation $M = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & v_1 \\ b_1 & b_2 & v_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ und
- Projektionskoeffizienten p_1, p_2

Projektive Abbildung (2D) als Matrix in homogenen Koordinaten:

$$P_{M,p_1,p_2} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & v_1 \\ b_1 & b_2 & v_2 \\ p_1 & p_2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_{M,p_1,p_2} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 x_1 + a_2 x_2 + v_1 \\ b_1 x_1 + b_2 x_2 + v_2 \\ p_1 x_1 + p_2 x_2 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ y'_3 \end{pmatrix}$$

Umrechnung nach $\mathbb{R}^2$: $y_1 = y'_1 / y'_3$, $y_2 = y'_2 / y'_3$ (nichtlinear)

Bestimmung projektiver Transformationen

typischer Ausgangspunkt:

- (projektiv) verzerrtes Bild
- Menge von Referenzpunkten, für die Position im Ursprungs- und im Zielbild bekannt sind

gesucht:
Transformationsmatrix zur Entzerrung des Bildes
(8 Koeffizienten $a_1, a_2, b_1, b_2, v_1, v_2, p_1, p_2$)

Gleichungssystem mit 8 Unbekannten
also wenigstens 4 Referenzpunkte nötig

Auflösen der Gleichungen

$$y_1 = \frac{a_1 x_1 + a_2 x_2 + v_1}{p_1 x_1 + p_2 x_2 + 1} \quad y_2 = \frac{b_1 x_1 + b_2 x_2 + v_2}{p_1 x_1 + p_2 x_2 + 1}$$

für jeden Referenzpunkt $y = (y_1, y_2)$ nach den Koeffizienten

Rasterung

Abbildung eines
Bildes $B \in \text{col}^{(\mathbb{R}^2)}$ mit stetiger Positionsmenge (Ebene $\mathbb{R}^2$)
auf ein digitales Bild $C \in \text{col}^{\text{pos}}$ mit diskreter Menge von
Positionen $\text{pos} = \{0, \ldots, m-1\} \times \{0, \ldots, n-1\}$ (Rasterpunkte)
besteht aus zwei Teilaufgaben:

1. Abbildung $\mathbb{R}^2 \to \text{pos}$
2. Bestimmung der Farbwerte $C(p)$ für Rasterpunkte $p \in \text{pos}$, verschiedene Möglichkeiten
   - $C(p) := B(p)$ (Farbwert an Stützstelle p)
     nur möglich, wenn Farbwert $B(p)$ für $p \in \text{pos}$ gegeben ist
   - $C(p) := f(U(p))$ als Funktion aller Farben in einer geeignet definierten Umgebung $U(p) \subset \mathbb{R}^2$ von p
     (z.B. Mittelwert $C(p) := \frac{\sum_{q \in U(p)} B(q)}{|U(p)|}$)

Interpolation der Intensitäten

Das geometrische Transformationen nicht immer Pixel auf Pixel abbilden, wird der Farbwert eines Pixels $q \in \mathrm{pos}'$ im transformierten Bild häufig aus den Farbwerten einer Umgebung (Menge von Pixeln) von $T^{-1}(q) \in \mathrm{pos}$ im Original berechnet (interpoliert).

gegeben: digitales (Original-)Bild $B \in \mathrm{col}^{\mathrm{pos}}$,
geometrische Transformation $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

gesucht: transformiertes digitales Bild $C \in \mathrm{col}^{\mathrm{pos}'}$

Annahmen:

- Ursprungs- und Zielbild sind Approximationen desselben stetigen (beliebig fein aufgelösten) Bildes
(dessen Werte aber i.A. nur an den Stützstellen pos bekannt ist)
- Positionen werden als Rasterpunkte im $\mathbb{R}^2$ betrachtet
- Farbwert eines Rasterpunktes $q \in \mathrm{pos}'$ im Zielbild lässt sich aus den Farbwerten der Rasterpunkte in einer Umgebung $U(T^{-1}(q)) \in 2^{\mathrm{pos}}$ des rücktransformierten Rasterpunktes $T^{-1}(q) \in \mathbb{R}^2$ berechnen durch
Interpolationsfunktion $g : \mathrm{col}^{\mathrm{pos}} \times \mathbb{R}^2 \times 2^{\mathrm{pos}} \to \mathrm{col}$

Transformation digitaler Bilder: $T' : \mathrm{col}^{\mathrm{pos}} \times (\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2) \to \mathrm{col}^{\mathrm{pos}'}$ mit

$$\forall q \in \mathrm{pos}' : T'(B, T, q) = g(B, T^{-1}(q), U(T^{-1}(q)))$$

Interpolationsfunktionen

prominente Interpolationsfunktionen $g : \text{col}^{\text{pos}} \times \mathbb{R}^2 \times 2^{\text{pos}} \to \text{col}$:

- Mittelwerte der Umgebungswerte

$$g(B, p, U) = \text{avg}\{B(r) \mid r \in U\} \quad (\text{med}\{B(r) \mid r \in U\})$$

- Farbe des (eines) nächsten Nachbarn (Rasterpunkt in der Umgebung $U \subseteq \text{pos}$ mit geringstem Abstand zu p)

  $\forall p \in \mathbb{R}^2 : g(B, p, U) = B(r)$ wobei $d(r, p) = \min\{d(s, p) \mid s \in U\}$

- lineare Interpolation (der 1 bis 4 nächsten Punkte im Original)
  für $p = (z', s') \in \mathbb{R}^2$ mit $z \leq z' \leq z + 1$, $s \leq s' \leq s + 1$
  Umgebung $U(z', s') = \{(z, s), (z, s + 1), (z + 1, s), (z + 1, s + 1)\}$

$$\begin{aligned} & g(B, (z', s'), \{(z, s), (z, s + 1), (z + 1, s), (z + 1, s + 1)\}) \\ = \quad & a_1 B(z, s) + a_2 B(z, s + 1) + a_3 B(z + 1, s) + a_4 B(z + 1, s + 1) \end{aligned}$$

  (gewichtete Summe der Farbwerte) mit

$$\begin{aligned} a_1 = (1 + z - z')(1 + s - s') \quad &, \quad a_2 = (1 + z - z')(s' - s), \\ a_3 = (z' - z)(1 + s - s') \quad &, \quad a_4 = (z' - z)(s' - s) \end{aligned}$$

- kubische Interpolation

Eindimensionale Signale

analog : Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

digital : Funktion $\text{pos} \to \text{col}$ mit $\text{pos}, \text{col} \subseteq \mathbb{N}$, oft
$\text{pos} = \{0, \ldots, m-1\} \subseteq \mathbb{N}$,
$\text{col} = \{0, \ldots, n-1\} \subseteq \mathbb{N}$
(Array / Liste / 1D-Matrix natürlicher Zahlen)

Beispiele:

- Temperaturverläufe
- Börsenkurse
- Töne (Schallwellen)

Abtastung eindimensionaler Signale

(Transformation eines Signals mit stetigem Definitionsbereich in ein Signal mit diskretem Definitionsbereich)

gegeben: Funktion $B : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (eindimensionales Signal / Bild),
Menge pos $= \{0, \ldots, m-1\}$

gesucht: Funktion $B' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$\forall p \in \mathbb{R} : B'(p) = \begin{cases} B(p) & \text{falls } p \in \text{pos} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Ziel: Transformation $f : (\mathbb{R} \to \mathbb{R}) \to (\text{pos} \to \mathbb{R})$ mit

$$\forall B \in (\mathbb{R}^{\mathbb{R}})\ \forall p \in \text{pos} : f(B)(p) = B(p)$$

Realisierung von f durch Multiplikation von B mit
Dirac-Impulsen $\delta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = 1 \quad \text{und} \quad \forall x \in \mathbb{R} : x \neq 0 \to \delta(x) = 0$$

Dirac-Impuls

Dirac-Impuls $\delta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = 1 \quad \text{und} \quad \forall x \in \mathbb{R} : x \neq 0 \to \delta(x) = 0$$

Approximation von δ durch Rechteck-Impulse: $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
f_1(x) &= \begin{cases} 1 & \text{falls } -1/2 \leq x \leq 1/2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\
f_2(x) &= \begin{cases} 2 & \text{falls } -1/4 \leq x \leq 1/4 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\
&\vdots \\
f_i(x) &= \begin{cases} 2^{i-1} & \text{falls } -2^{-i} \leq x \leq 2^{-i} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

$$\forall i > 0 : \int_{-\infty}^{\infty} f_i(x)dx = \int_{-2^{-i}}^{2^{-i}} 2^{i-1}dx = 2^{i-1} \cdot 2 \cdot 2^{-i} = 1$$

Multiplikation mit Dirac-Impuls

$$\forall i \in \mathbb{N}: \quad f_i(x) = \begin{cases} 2^{i-1} & \text{falls } -2^{-i} \leq t \leq 2^{-i} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Wirkung der Multiplikation eines Bildes $B : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit f_i:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} B(x) f_i(x) dx &= \int_{-2^{-i}}^{2^{-i}} 2^{i-1} B(x) dx \\ &= \text{avg}\left\{ B(x) \mid x \in \left[-2^{-i}, 2^{-i}\right] \right\} \end{aligned}$$

$$\text{für } i \to \infty: \quad \delta : \int_{-\infty}^{\infty} B(x)\delta(x) dx = B(0)$$

Dirac-Kamm

Dirac-Impuls $\delta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = 1 \quad \text{und} \quad \forall x \in \mathbb{R} : x \neq 0 \to \delta(x) = 0$$

Verschiebung von B um p entlang der t-Achse:

$$\int_{-\infty}^{\infty} B(x+p)\delta(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} B(x)\delta(p-x)dx = B(p)$$

(wegen $\delta(p-x) \neq 0$ gdw. $x = p$)

Dirac-Kamm: Summe der Dirac-Impulse an jedem $p \in \text{pos}$

$$\forall x \in \mathbb{R} : \delta_{\text{pos}}(x) = \sum_{p \in \text{pos}} \delta(p-x)$$

Transformation $f : (\mathbb{R} \to \mathbb{R}) \to (\mathbb{R} \to \mathbb{R})$ mit

$$\begin{aligned} \forall B \in (\mathbb{R}^{\mathbb{R}})\ \forall p \in \text{pos} : f(B)(p) &= \int_{-\infty}^{\infty} B(x)\delta_{\text{pos}}(x)dx \\ &= \begin{cases} B(p) & \text{falls } p \in \text{pos} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

Ziel erreicht: Abtastung der Funktion $B : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an den Stellen pos

Beispiele

- $B : \mathbb{R} \to \{0,1\}$ mit $\forall x \in \mathbb{R} : B(x) = \lfloor x \rfloor \mod 2$
  Abtastung an allen Positionen
  - pos $= \{n/2 \mid n \in \{0,\dots,10\}\}$
    $B' = \{(0,0),(1/2,0),(1,1),(3/2,1),(2,0),(5/2,0),\dots\}$
  - pos $= \{3n/2 \mid n \in \{0,\dots,10\}\}$
    $B' = \{(0,0),(3/2,1),(3,1),(9/2,0),(6,0),(15/2,1),\dots\}$
    Unterabtastung
  - pos $= \{4n \mid n \in \{0,\dots,10\}\}$
    $B' = \{(0,0),(4,0),(8,0),\dots\}$
    Unterabtastung
- $B : \mathbb{R} \to [-1,1]$ mit $\forall t \in \mathbb{R} : B(x) = c \sin(x)$

Aliasing: Rekonstruktion nicht im Original vorhandener Frequenzen
(Alias-Frequenzen, Schwebungen)

Probleme bei der Abtastung

Durch Digitalisierung (Transformation stetiger Signale in diskrete) entstehen möglicherweise

Informationsverlust bei Unterabtastung

verfälschte Strukturen : Alias-Effekte

Nyquist-Shannon-Abtasttheorem:
Zur verlustfreien Rekonstruktion darf das Abtastraster (Abstand Δ zwischen den Abtast-Positionen) nicht gröber sein als die halbe Größe des kleinsten abzubildenden Details.

alternative Formulierung:
Abtastrate $(1/\Delta)$ muss wenigstens doppelt so groß wie die höchste im Signal vorkommende Frequenz sein

Zusammenfassung Abtastung 1D

Transformation einer stetigen Funktion $B : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (analoges Signal)
in eine Funktion $B' : \text{pos} \to \mathbb{R}$ (diskretes Signal)
mathematische Beschreibung dieser Transformation durch
Funktion(al) $f_{\text{pos}} : (\mathbb{R} \to \mathbb{R}) \to (\text{pos} \to \mathbb{R})$

Dirac-Impuls $\delta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = 1 \quad \text{und} \quad \forall x \in \mathbb{R} : x \neq 0 \to \delta(x) = 0$$

Dirac-Kamm δ_{pos} an Abtaststellen $\text{pos} \subset \mathbb{R}$:
$\forall x \in \mathbb{R} : \delta_{\text{pos}}(x) = \sum_{p \in \text{pos}} \delta(p - x)$

abgetastetes Signal $f_{\text{pos}}(B)$ an Abtaststellen $\text{pos} \subset \mathbb{R}$: $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$(f_{\text{pos}}(B))(x) = \int_{-\infty}^{\infty} B(x)\delta_{\text{pos}}(x)dx = \sum_{p \in \text{pos}} \int_{-\infty}^{\infty} B(x)\delta(p-x)dx$$

Abtasttheorem (Nyquist-Shannon): Zur verlustfreien Rekonstruktion darf das Abtastraster (Abstand zwischen benachbarten Abtast-Positionen) nicht gröber sein als die halbe Größe des kleinsten abzubildenden Details.

Faltung

Verschiebung eines Dirac-Impulses um p entlang der x-Achse:

$$\int_{-\infty}^{\infty} B(x+p)\delta(x)dx \quad = \quad \int_{-\infty}^{\infty} B(x)\delta(p-x)dx = (B * \delta)(p)$$

ist Spezialfall einer Operation mit zwei Funktionen:

Für $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist die Faltung (Convolution) von f und g definiert durch

$$\forall p \in \mathbb{R} : (f * g)(p) = \int_{-\infty}^{\infty} f(p-x)g(x)dx$$

Faltung – Beispiel

$$f(x) = \chi_{[-1,1]} = \begin{cases} 1 & \text{falls } -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$g(x) = 2\chi_{[0,2]} = \begin{cases} 2 & \text{falls } 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

an Stellen $p \in \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ ausrechnen:

$$\forall p \in \mathbb{R} : (f * g)(p) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(p-x)dx = \max(0, 4 - 2|p-1|)$$

anschaulich:

1. Spiegelung von g an y-Achse
2. gespiegeltes g wird entlang der x-Achse geschoben
3. $(f * g)(p)$ ist der Flächeninhalt der vom Produkt beider Funktionen überdeckten Fläche