Was bisher geschah

- digitale Bilder:
  - Funktion $B : \mathrm{pos} \to \mathrm{col}$
  - Matrix $B \in \mathrm{col}^{\mathrm{pos}}$
- statistische Merkmale (Bildanalyse)
- Punktoperationen $f : \mathrm{col}_1 \to \mathrm{col}_2$ (Farbtransformation)
- Geometrische Operationen $f : \mathrm{pos}_1 \to \mathrm{pos}_2$ (Koordinatentransformation)
- Interpolation der Intensitäten
- Digitalisierung (Abtastung) von 1D- und 2D-Signalen
- Aliasing-Effekte
- Faltung von Signalen (Funktionen)
- Fourier-Transformierte / inverse Fourier-Transformierte und darin enthaltene Informationen über das Bild
- Operationen im Frequenzbereich
- Filter zur Glättung, Kanten-Hervorhebung

Wiederholung Filter

Glättungsfilter: Tiefpassfilter (mit Normierung)

Mittelwert

$$\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Gauß

$$\frac{1}{10}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Median (nichtlinear)

Gradienten-Filter

(Approximation der 1. oder 2. Ableitung, Hochpass)
zur Kanten-Hervorhebung, z.B.

horizontale / vertikale Differenzen, z.B.

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Roberts: diagonale Differenzen, z.B.

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Prewitt: Differenzen und Mittelung senkrecht dazu

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Sobel: Differenzen und Gauß senkrecht dazu

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

oft Linearkombinationen (punktweise Addition der Filterkerne)

Template-Matching

- Filterung mit mehreren rotierten Filterkernen (für Kanten verschiedener Richtungen) nacheinander
- Ergebnisbild: punktweise Maximum der Beträge

geeignete Filterkerne (liefern oft bessere Ergebnisse als Prewitt, Sobel)

Kompass-Gradient

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \dots$$

Kirsch-Operator

$$\begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 \\ -3 & 0 & -3 \\ -3 & -3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 5 & 5 \\ -3 & 0 & 5 \\ -3 & -3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & -3 & 5 \\ -3 & 0 & 5 \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix} \dots$$

Laplace-Operator

Differenzenfilter, Approximation der 2. Richtungsableitungen

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Linearkombinationen, z.B.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -8 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Transformation von Binärbildern

Bild = Matrix $B \in \text{col}^{\text{pos}}$

hier Binärbilder mit Farben $\text{col} = \{0, 1\}$
(0 für schwarz, 1 für weiß)

Annahmen:

- Vordergrund und Hintergrund getrennt
  (z.B. durch Binarisierung mit Schwellwert)
- Vordergrund weiß (1), Hintergrund schwarz (0)

Ziel: Merkmale (z.B. Form) der (weißen) Regionen

- hervorheben,
- um Störungen bereinigen,
  (einzelne Punkte, Löcher, zerklüftete Ränder)
- erkennen
- Mustern zuordnen (klassifizieren)

Morphologische Operationen

Idee:
Transformation von Binärbildern $B \in \{0,1\}^{\text{pos}}$ durch Verknüpfung von B mit bestimmten (geeignet transformierten) Strukturelementen (Masken) durch Mengenoperationen

Strukturelement $M : \text{pos}' \to \{0,1\}$ definiert

- Bezugspunkt $(0,0) \in \text{pos}'$ (hot spot)
- relevante Positionen $p \in \text{pos}$ mit $M(p) = 1$ (an der Mengenoperation mit B beteiligt)
- irrelevante Positionen $p \in \text{pos}$ mit $M(p) = 0$

Beispiele:

0	1	0
0	1	0
0	1	0

0	1	0
1	1	1
0	1	0

1	0	0
1	1	0
0	0	1

1	1	0
1	0	0
1	1	1

1	1

Strukturelemente

Form und Bezugspunkt abhängig von gewünschter Wirkung

prominente Formen
(häufig symmetrisch mit Bezugspunkt in der Mitte):

- Kreuz (z.B. 4-Nachbarschaft)
- Quadrat (z.B. 8-Nachbarschaft)
- Rechtecke mit verschiedenen Positionen des Bezugspunktes
- Kreise, Ellipsen (diskrete Approximationen)

Wiederholung (geometrische Transformationen):
Verschiebung $V_p(B) : \{0,1\}^{\mathrm{pos}} \to \{0,1\}^{\mathrm{pos}}$ um
$p = (p_x, p_y) \in \mathrm{pos}$

$$\forall (x,y) \in \mathrm{pos} : V_p(B)(x,y) = (x + p_x, y + p_y)$$

Erosion

gegeben: $B : \text{pos} \to \{0, 1\}$
Strukturelement $M : \text{pos}' \to \{0, 1\}$

Erosion: Bildpunkt p weiß (Vordergrund) gdw.
alle relevanten Positionen des mit dem Bezugspunkt in p verschobenen Strukturelementes weiß

$$B \ominus M = \{p \in \text{pos} \mid V_p(M) \subseteq B\} = \{p \in \text{pos} \mid V_p(M) \cap \overline{B} = \emptyset\}$$

$$\begin{aligned}
\forall p \in \text{pos} : (B \ominus M)(p) &= \min\{B(q) \mid q \in V_p(M)\} \\
&= \min\{B(q) \mid (V_p(M))(q) = 1\} \\
&= \begin{cases} 1 & \text{, falls } \forall q \in V_p(M) : B(q) = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}
\end{aligned}$$

Erosion – Beispiel

$$B = \begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \qquad M = \begin{array}{|c|c|}\hline {\color{red}1} & 1 \\ \hline \end{array} \qquad B \ominus M = \begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 0 & 1 & 1 & \mathbf{0} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & \mathbf{0} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & \mathbf{0} & 0 \\ \hline 0 & \mathbf{0} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \mathbf{0} & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

Erosion – Eigenschaften

- nicht kommutativ: $\exists B, M : B \ominus M \neq M \ominus B$
- nicht assoziativ: $\exists B, M, M' : (B \ominus M) \ominus M' \neq B \ominus (M \ominus M')$

Wirkung: Abtragen der Vordergrundregionen an

- Randpunkten
- kleinen isolierten Punktgruppen
- konvexen Randbereichen
- Erosion mit quadratischem Strukturelement: Minimum-Filter

Dilatation

gegeben: $B : \mathrm{pos} \to \{0, 1\}$
Strukturelement $M : \mathrm{pos}' \to \{0, 1\}$

Dilatation: Bildpunkt p weiß gdw.
wenigstens eine relevante Position des mit dem Bezugspunkt in p verschobenen Strukturelementes weiß

$$B \oplus M = \{p \in \mathrm{pos} \mid V_p(M) \cap B \neq \emptyset\}$$

$$\begin{aligned}
\forall p \in \mathrm{pos} : (B \oplus M)(p) &= \max\{B(q) \mid q \in V_p(M)\} \\
&= \max\{B(q) \mid (V_p(M))(q) = 1\} \\
&= \begin{cases} 1 & \text{, falls } \exists q \in V_p(M) : B(q) = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}
\end{aligned}$$

Dilatation – Beispiel

$$B = \begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \qquad M = \begin{array}{|c|c|}\hline {\color{red}1} & 1 \\ \hline \end{array} \qquad B \oplus M = \begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline \mathbf{1} & 1 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & \mathbf{1} & 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & \mathbf{1} & 1 & 1 & 0 \\ \hline \mathbf{1} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \mathbf{1} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

Dilatation – Eigenschaften

- kommutativ: $\forall B, M : B \oplus M = M \oplus B$
- assoziativ: $\forall B, M, M' : (B \oplus M) \oplus M' = B \oplus (M \oplus M')$

Wirkung: Auffüllen von Vordergrundregionen an

- konkaven Randbereichen
- Löchern
- Dilatation mit quadratischem Strukturelement: Maximum-Filter

Beziehungen zwischen Erosion und Dilatation

Für alle Bilder $B \in \{0,1\}^{\text{pos}}$ und
alle Strukturelemente $M, M' \in \{0,1\}^{\text{pos}'}$ mit 1 im Referenzpunkt
gilt:

$$\begin{aligned}
B \ominus M \subseteq \quad & B & \subseteq B \oplus M \\
(B \ominus M) \ominus M' & = & B \ominus (M \oplus M') \\
\overline{B \ominus M} & = & \overline{B} \oplus M \\
\overline{B \oplus M} & = & \overline{B} \ominus M
\end{aligned}$$

Kombinationen von Erosions- und Dilatationschritten:
Opening, Closing

Morphologisches Öffnen (Opening)

gegeben: $B : \text{pos} \rightarrow \{0, 1\}$
Strukturelement (Maske) $M : \text{pos}' \rightarrow \{0, 1\}$

Opening

$$B \circ M = (B \ominus M) \oplus M'$$

M': Strukturelement M am Referenzpunkt gespiegelt
(um 180° gedreht)

Wirkung:

- Dilatation macht die Verkleinerung der die Erosion überlebenden (hellen) Regionen rückgängig
- Beseitigung von kleinen oder schmalen hellen Bereichen (falsch als Vordergrund interpretierte Stellen)
- Trennung von gerinfügig verbundenen (hellen) Regionen

Opening – Beispiel

$$B = \begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \qquad M = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 1 \\ \hline \end{array} \qquad B \ominus M = \begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

$$B \circ M = (B \ominus M) \oplus M' \quad \text{mit} \quad M' = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 1 \\ \hline \end{array} \qquad B \circ M = \begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & \mathbf{0} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \mathbf{0} & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

Morphologisches Schließen (Closing)

gegeben: $B : \text{pos} \to \{0, 1\}$
Strukturelement (Maske) $M : \text{pos}' \to \{0, 1\}$

Closing

$$B \bullet M = (B \oplus M) \ominus M'$$

M': Strukturelement M am Referenzpunkt gespiegelt (um 180° gedreht)

Wirkung:

- Erosion macht die Ausdehnung der (hellen) Regionen bei Dilation rückgängig
- Beseitigung von kleinen oder schmalen dunklen Bereichen (Störungen in Vordergrund-Regionen)
- Verbindung nahe benachbarter Vordergrundregionen

Closing – Beispiel

$$B = \begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \qquad M = \begin{array}{|c|c|}\hline \color{red}{1} & 1 \\ \hline \end{array} \qquad B \oplus M = \begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

$$B \bullet M = (B \oplus M) \ominus M' \quad \text{mit} \quad M' = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & \color{red}{1} \\ \hline \end{array} \qquad B \bullet M = \begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

Beziehungen zwischen morphologischem Öffnen und Schließen

Für alle Bilder $B, C \in \{0,1\}^{\text{pos}}$ und alle Strukturelemente $M \in \{0,1\}^{\text{pos}'}$ gilt

$$
\begin{array}{rcl}
B \circ M \subseteq & B & \subseteq B \bullet M \\
(B \circ M) \circ M = (B \circ M) & & (B \bullet M) \bullet M = (B \bullet M) \\
\overline{A \circ M} = \overline{A} \bullet M & & \overline{A \bullet M} = \overline{A} \circ M \\
A \circ M = \overline{\overline{A} \bullet M} & & A \bullet M = \overline{\overline{A} \circ M} \\
B \subseteq C & \text{gdw.} & (B \circ M \subseteq C \circ M) \wedge (B \bullet M \subseteq C \bullet M)
\end{array}
$$

Beseitigung größerer Störungen durch geeignete Folgen von Öffnen- und Schließen-Schritten

Morphologische Operationen auf Grauwertbildern

Bild $\mathrm{col}^{\mathrm{pos}}$ mit Farbbereich $\mathrm{col} = \{0, \ldots, k\}$ statt $\{0, 1\}$

Übergang von charakteristischer Funktion $B : \mathrm{pos} \to \{0, 1\}$ zu Funktion $B : \mathrm{pos} \to \{0, \ldots, k\}$

geeignete Erweiterungen der Mengenoperationen
(punktweise Boolesche Operationen)
vom Farbbereich $\{0, 1\}$ auf $\{0, \ldots, k\}$, z.B.:

$$\begin{array}{ccl} \wedge & \mapsto & \min \\ \vee & \mapsto & \max \\ \neg & \mapsto & (x \mapsto k - x) \end{array}$$

(für Spezialfall $k = 1$ genau die Booleschen Operationen)

Beispiel: Erosion von Grauwertbildern

gegeben: $B : \text{pos} \to \{0, \ldots, k\}$
Strukturelement (Maske) $M : \text{pos}' \to \{0, 1\}$

Erosion:

$$\forall p \in \text{pos} : (B \ominus M)(p) = \min\{B(p+v) \mid M(v) = 1\}$$

Wirkung:
Verdunklung der hellen Regionen (Vordergrund)
(ähnlich Minimum-Filter mit Strukturelement)

Dilatation:

$$\forall p \in \text{pos} : (B \oplus M)(p) = \max\{B(p+v) \mid M(v) = 1\}$$

Opening, Closing damit analog zu Binärbildern