

Was bisher geschah

- ▶ digitale Bilder:
 - ▶ Funktion $B : \text{pos} \rightarrow \text{col}$
 - ▶ Matrix $B \in \text{col}^{\text{pos}}$
- ▶ statistische Merkmale (Bildanalyse)
 - ▶ Bild \mapsto Wert: Extrema, Mittelwerte, Abweichung, Entropie
 - ▶ Bild \mapsto Funktion $\text{col} \rightarrow \mathbb{N}$: (kumulierte) Histogramme
 - ▶ Bild \mapsto Funktion von Teilmenge von $\text{pos} \rightarrow \mathbb{N}$:
Linienprofile, integriertes Linienprofil
 - ▶ Bild \mapsto Funktion $\text{col}^2 \rightarrow \mathbb{N}$: Co-occurrence-Matrix

und ihre Aussagen über das Bild

- ▶ Punktoperationen $f : \text{col}_1 \rightarrow \text{col}_2$ (Farbtransformation)
und ihre Fortsetzung $f : \text{col}_1^{\text{pos}} \rightarrow \text{col}_2^{\text{pos}}$

$$\forall p \in \text{pos} : f(B)(p) = f(B(p))$$

- ▶ Intensitäts-, Kontrasterhöhung
- ▶ Farbtransformationen
- ▶ Binarisierung
- ▶ Kombination mehrerer Bilder

Nachbarschaftsbeziehungen zwischen Positionen

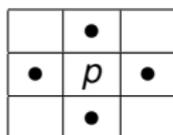
Zur Identifikation zusammenhängender Bildteile (Linien, Flächen) verschiedene Nachbarschaftsbeziehungen üblich, z.B.

Zwei **Positionen** $p, q \in \text{pos} = \{0, \dots, m-1\} \times \{0, \dots, n-1\}$ heißen genau dann **benachbart**, wenn sie

1. ungleich sind und
2. wenigstens eine gemeinsame

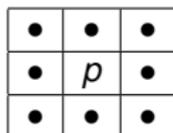
Kante besitzen, 4-Nachbarschaft von $p = (z, s)$:

$$N_4(p) = \{(z-1, s), (z+1, s), (z, s-1), (z, s+1)\} \cap \text{pos}$$



Ecke besitzen, 8-Nachbarschaft von $p = (z, s)$:

$$N_8(p) = \left\{ \begin{array}{l} (z-1, s-1), (z, s-1), (z+1, s-1), \\ (z-1, s), (z+1, s), (z-1, s+1), \\ (z, s+1), (z+1, s+1) \end{array} \right\} \cap \text{pos}$$



Geometrische Operationen in der DBV

Anwendungen z.B. in

- ▶ Geoinformatik:
 - ▶ Satellitenbilder → geographische Daten
 - ▶ Bereinigung um Verzerrungen durch Höhenunterschiede
- ▶ Objekterkennung
- ▶ autonomes Fahren:
 - ▶ Kamerabild → Umgebungskarte
- ▶ Schrifterkennung:
 - ▶ Zeilenausrichtung
 - ▶ Normierung der Zeichengröße
 - ▶ Schrägschrift-Korrektur
- ▶ QR-Codes: Entzerrung
- ▶ Bildvergrößerung und -verkleinerung

Geometrische Operationen

Operationen auf der Menge pos , wobei

- ▶ Intensitäten
- ▶ Nachbarschaftsbeziehungen zwischen Positionen

weitgehend unverändert bleiben

gegeben: $B \in \text{col}^{\text{pos}_1}$

gesucht: $C \in \text{col}^{\text{pos}_2}$

Transformationen:

linear Kombinationen von

- ▶ Spiegelung
- ▶ Verschiebung
- ▶ Skalierung (Zoom)
- ▶ Drehung

nichtlinear z.B. perspektivische Abbildungen, Warping, Swirl

Transformationen im \mathbb{R}^2

Transformation $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

für digitale Bildverarbeitung

(Beschränkung auf Stützstellen im Raster):

$f : \text{pos} \rightarrow \text{pos}'$

hier mit rechteckigen Rastern (Adressen in Matrizen)

$\text{pos} = \{0, \dots, m-1\} \times \{0, \dots, n-1\}$ und

$\text{pos}' = \{0, \dots, m'-1\} \times \{0, \dots, n'-1\}$

meist Koordinatenverschiebung mit $(0, 0)$ im Bildmittelpunkt

Probleme bei Transformationen $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$:

- ▶ Zielpositionen evtl. nicht in pos'
- ▶ nicht jede Position in pos' ist Bild einer Position im Original
- ▶ berechnete Zielposition liegt i.A. nicht auf Rasterpunkt
- ▶ Festlegung des Farbwertes im transformierten Bild nötig (Interpolation)

Translation (Verschiebung) im \mathbb{R}^2

Verschiebung (2D) um einen Vektor $(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$:

$V_{(v_1, v_2)} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$V_{(v_1, v_2)} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + v_1 \\ x_2 + v_2 \end{pmatrix}$$

Verschiebung (2D) als Multiplikation mit Matrix $V_{(v_1, v_2)} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$
in **homogenen Koordinaten**:

$$V_{(v_1, v_2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & v_1 \\ 0 & 1 & v_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad V_{(v_1, v_2)} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + v_1 \\ x_2 + v_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

zu $V_{(v_1, v_2)}$ inverse Transformation: $V_{(v_1, v_2)}^{-1} = V_{(-v_1, -v_2)}$

Spiegelung (Reflexion) im \mathbb{R}^2

Spiegelung (2D) an

x_2 -Achse $S_h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$S_h \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Spiegelung an x_2 -Achse als Multiplikation mit Matrix $S_h \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ in homogenen Koordinaten:

$$S_h = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad S_h \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

x_1 -Achse $S_v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ analog:

$$S_v = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad S_v \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Spiegelungen sind involutiv (selbstinvers): $S_h^{-1} = S_h$, $S_v^{-1} = S_v$

Skalierung im \mathbb{R}^2

Skalierung (Stauchung, Streckung)

aus dem Ursprung $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$ mit

Skalierungsfaktoren $s_1 \in \mathbb{R}$ und $s_2 \in \mathbb{R}$

$S_{(s_1, s_2)} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$\forall x \in \mathbb{R}^2 : S_{(s_1, s_2)}(x) = (s_1 x_1, s_2 x_2)$$

Skalierung (2D) als Matrixmultiplikation in homogenen Koordinaten:

$$S_{(s_1, s_2)} = \begin{pmatrix} s_1 & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad S_{(s_1, s_2)} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_1 x_1 \\ s_2 x_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

zu $S_{(s_1, s_2)}$ inverse Transformation: $S_{(s_1, s_2)}^{-1} = S_{(1/s_1, 1/s_2)}$

Spiegelungen sind Skalierungen: $S_h = S'_{(-1, 1)}$ und $S_v = S'_{(1, -1)}$

Rotation (Drehung) im \mathbb{R}^2

Drehung um einen Winkel $\varphi \in [0, 2\pi]$ im mathematischen Drehsinn (entgegen Uhrzeigersinn) um Ursprung $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$

$D_\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$\forall x \in \mathbb{R}^2 : D_\varphi(x) = (x_1 \cos \varphi - x_2 \sin \varphi, x_1 \sin \varphi + x_2 \cos \varphi)$$

Drehung (2D) als Matrix in homogenen Koordinaten:

$$D_\varphi = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad D_\varphi \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \cos \varphi - x_2 \sin \varphi \\ x_1 \sin \varphi + x_2 \cos \varphi \\ 1 \end{pmatrix}$$

zu D_φ inverse Transformation: $D_\varphi^{-1} = D_{-\varphi}$

Affine Transformationen

(z.B. für schräg aufgenommenen Bilder Schriftstücke, QR-Codes)

Matrixdarstellung der linearen Transformationen ermöglicht die Zusammenfassung der Nacheinanderausführung mehrerer Transformationen (Matrixmultiplikation)

allgemeine Form affiner Transformationen im \mathbb{R}^2
(in homogenen Koordinaten):

$$M = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & v_1 \\ b_1 & b_2 & v_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Jede Transformation (Matrix) dieser Form lässt sich durch eine endliche Verkettung der elementaren Transformationen (Matrix-Multiplikationen)

- ▶ Verschiebung
- ▶ Skalierung
- ▶ Drehung um Ursprung $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$

erzeugen.

für $M = T_1 \circ \dots \circ T_n$ gilt $M^{-1} = T_n^{-1} \circ \dots \circ T_1^{-1}$

Beispiel

	p	
	q	

Koordinaten $p = (0, 1)$ und $q = (1, 1)$

Verschiebung um $(-1, -1)$, danach Drehung um $\pi/4$,
danach Skalierung mit $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Schrittweise Anwendung auf $p = (0, 1)$ und $q = (1, 1)$

Gesamttransformation:

Matrixmultiplikation in „umgekehrter“ Reihenfolge

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Bestimmung affiner Transformationen

gegeben: Zuordnung $\{(p_1, q_1), \dots, (p_n, q_n)\}$ zwischen Positionen $\{p_1, \dots, p_n\} \in \text{pos}(B)$ im Bild B und $\{q_1, \dots, q_n\} \in \text{pos}(A)$ im Original A

gesucht: Beschreibung der Transformation $A \mapsto B$ durch Matrix M mit $\forall i \in \{1, \dots, n\} : M(q_i) = p_i$

$$M = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & v_1 \\ b_1 & b_2 & v_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

d.h. gesucht sind die sechs Koeffizienten $a_1, a_2, b_1, b_2, v_1, v_2$ mit

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} : M \begin{pmatrix} q_{i1} \\ q_{i2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{i1} \\ p_{i2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

als lineares Gleichungssystem mit Unbekannten $a_1, a_2, b_1, b_2, v_1, v_2$:

$$\begin{aligned} q_{i1} a_1 + q_{i2} a_2 + v_1 &= p_{i1} \\ q_{i1} b_1 + q_{i2} b_2 + v_2 &= p_{i2} \end{aligned}$$

eindeutig lösbar für sechs Gleichungen
= drei (nicht kollineare) Referenzpunkte

Beispiel

Gesucht ist die affine Transformation $M = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & v_1 \\ b_1 & b_2 & v_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, welche die folgenden Punkte aufeinander abbildet:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Gleichungssystem

$$a_2 + v_1 = -1 \quad (1)$$

$$b_2 + v_2 = -1 \quad (2)$$

$$a_1 + a_2 + v_1 = 0 \quad (3)$$

$$b_1 + b_2 + v_2 = 0 \quad (4)$$

$$a_1 + v_1 = 2 \quad (5)$$

$$b_1 + v_2 = -1 \quad (6)$$

(3)-(1): $a_1 = 1$, (4)-(2): $b_1 = 1, \dots$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$