

# Was bisher geschah

- ▶ digitale Bilder
  - ▶ Funktion  $B : \text{pos} \rightarrow \text{col}$
  - ▶ Matrix  $B \in \text{col}^{\text{pos}}$
- ▶ statistische Merkmale (Bildanalyse)
- ▶ Punktoperationen  $f : \text{col}_1 \rightarrow \text{col}_2$  (Farbtransformation)
- ▶ Geometrische Operationen  $f : \text{pos}_1 \rightarrow \text{pos}_2$  (Koordinatentransformation)
- ▶ Interpolation der Intensitäten
- ▶ 1D- und 2D-Signale (analog, diskret)
- ▶ Digitalisierung (Abtastung) von 1D- und 2D-Signalen
- ▶ Alias-Effekte
- ▶ Faltung von 1D- und 2D-Funktionen (analog, diskret)
- ▶ Wiederholung Fourierreihen

## Fourierreihe (1D) – Wiederholung

Darstellung von (periodischen) Funktionen  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

als Linearkombination (gewichtete Summe)

periodischer zueinander orthogonaler „Standard“-Funktionen

mit Perioden  $p_k = \frac{2\pi k}{p}$  für Periode  $p$  von  $f$  und alle  $k \in \mathbb{Z}$ .

Für Fourierreihen trigonometrische Funktionen mit Periode  $2\pi$

cos gerader Anteil

sin ungerader Anteil

$$\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$$

mit Koeffizienten  $a_k, b_k \in \mathbb{R}$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(kx) dx \quad \left( \text{insbesondere } a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx \right)$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(kx) dx$$

# Komplexe Darstellung

Transformation von Linearkombinationen reellwertiger trigonometrischer Funktionen in  $\mathbb{C}$ -wertige Funktionen mit Hilfe der Eulerschen Formel:

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R} : e^{ix} &= \cos(x) + i \sin(x) \\ e^{ikx} &= \cos(kx) + i \sin(kx) \\ e^{-ikx} &= \cos(kx) - i \sin(kx)\end{aligned}$$

Darstellung von  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  als **Fourier-Reihe**:

$$\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$$

mit den **Fourier-Koeffizienten**

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx = \begin{cases} a_0/2 & \text{falls } k = 0 \\ (a_k - ib_k)/2 & \text{falls } k > 0 \\ (a_{-k} - ib_{-k})/2 & \text{falls } k < 0 \end{cases}$$

# Fourier-Reihen periodischer Funktionen (1D)

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  stückweise stetig und periodisch, d.h.

$$\exists p \in \mathbb{R} \forall x \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{Z} : f(x) = f(x + np)$$

Darstellung von  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  als Fourier-Reihe:  $\forall x \in \mathbb{R} :$

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left( a_k \cos \left( \frac{2\pi kx}{p} \right) + b_k i \sin \left( \frac{2\pi kx}{p} \right) \right) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left( c_k e^{i \frac{2\pi kx}{p}} \right)$$

mit den **Fourier-Koeffizienten**  $\forall k \in \mathbb{Z} : c_k \in \mathbb{C}$  mit

$$c_k = \frac{1}{p} \int_0^p f(x) e^{-i \frac{2\pi kx}{p}} dx = \frac{1}{p} \int_{-p/2}^{p/2} f(x) e^{-i \frac{2\pi kx}{p}} dx$$

Grundfrequenz von  $f$ :  $f_p = 1/p$

$c_k \neq 0$  gdw. Frequenz  $k/p$  kommt in  $f$  mit Amplitude  $|c_k|$  vor  
(diskretes) **Fourier-Spektrum** von  $f$ :

$c : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $\forall k \in \mathbb{Z} : c(k) = c_k$  (Folge  $(c_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ )

anschaulich:

- ▶  $f$  hat einen Frequenzanteil  $k/p$  gdw.  $c_k \neq 0$
- ▶  $|c_k|$  ist die Amplitude des Frequenzanteils  $k/p$

# Fourier-Transformation nicht-periodischer Funktionen

Idee: wachsende Periodenlänge  $\rightarrow$  geringere Frequenz

Grenzübergang von diskreten Frequenzen  $2\pi k/p \in \mathbb{R}$

zu kontinuierlichen Frequenzen  $u \in \mathbb{R}$

Falls zu einer (nicht notwendig periodischen) Funktion

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  für jedes  $u \in \mathbb{R}$  das Integral

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-iux} dx$$

existiert,

**Fourier-Transformation**  $F : \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{C}^{\mathbb{R}}$  mit

$$\forall u \in \mathbb{R} : (F(f))(u) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-iux} dx$$

$F(f)$  heißt die Fourier-Transformierte von  $f$

(kontinuierliches Fourier-Spektrum)

**inverse** Fourier-Transformation  $F^{-1} : \mathbb{C}^{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

$$\forall x \in \mathbb{R} : (F^{-1}(d))(x) = \int_{\mathbb{R}} d(u) e^{iux} du$$

# Diskrete Fourier-Transformation (1D)

gegeben:  $f : \text{pos} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\text{pos} = \{0, \dots, m-1\}$

Idee:

periodische Fortsetzung von  $f$  auf  $\mathbb{Z}$

(mit Periode  $m$ , Frequenz  $1/m$ )

diskrete Fourier-Transformation von  $f : \text{pos} \rightarrow \mathbb{R}$  (1-DFT):

$F : \mathbb{R}^{\text{pos}} \rightarrow \mathbb{C}^{\text{pos}}$  mit

$$\forall u \in \{0, \dots, m-1\} : F(f)(u) = \sum_{k=0}^{m-1} f(k) e^{-2\pi i k u / m}$$

inverse Fourier-Transformation von  $g : \text{pos} \rightarrow \mathbb{C}$ :

$F^{-1} : \mathbb{C}^{\text{pos}} \rightarrow \mathbb{R}^{\text{pos}}$  mit

$$\forall x \in \{0, \dots, m-1\} : F^{-1}(g)(x) = \sum_{k=0}^{m-1} g(k) e^{2\pi i k x / m}$$

# Eigenschaften der 1D-DFT

1D-DFT  $F : \mathbb{R}^{\text{pos}} \rightarrow \mathbb{C}^{\text{pos}}$

$$F(f)(x) = \sum_{k=0}^{m-1} f(k) e^{-2\pi i k x / m}$$

für alle  $f : \text{pos} \rightarrow \mathbb{R}$  gilt:

- ▶  $F(f)(x) = F(f)(-x)$  (symmetrisch)
- ▶  $|F(f)(x)| = |F(f)(-x)|$
- ▶  $F(f)(x + m) = F(f)(x)$  (unendlich periodisch)

## Diskrete Fourier-Transformation (2D)

gegeben:  $f : \text{pos} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\text{pos} = \{0, \dots, m-1\} \times \{0, \dots, n-1\}$

periodische Fortsetzung von  $f$  auf  $\mathbb{Z}^2$

diskrete Fourier-Transformation von  $f : \text{pos} \rightarrow \mathbb{R}$  (2-DFT):

$F : \mathbb{R}^{\text{pos}} \rightarrow \mathbb{C}^{\text{pos}}$  mit

$$\forall (u_x, u_y) \in \text{pos} : F(f)(u_x, u_y) = \sum_{x=0}^{m-1} \sum_{y=0}^{n-1} f(x, y) e^{-2\pi i(xu_x/m + yu_y/n)}$$

inverse Fourier-Transformation von  $g : \text{pos} \rightarrow \mathbb{C}$ :

$F^{-1} : \mathbb{C}^{\text{pos}} \rightarrow \mathbb{R}^{\text{pos}}$  mit

$$\forall (u_x, u_y) \in \text{pos} : F^{-1}(g)(u_x, u_y) = \sum_{x=0}^{m-1} \sum_{y=0}^{n-1} g(x, y) e^{2\pi i(xu_x/m + yu_y/n)}$$

## Fourier-Spektren (2D)

Fourier-Transformation  $F : \mathbb{R}^{\text{pos}} \rightarrow \mathbb{C}^{\text{pos}}$  mit

$$\forall (u_x, u_y) \in \text{pos} : F(f)(u_x, u_y) = \sum_{x=0}^{m-1} \sum_{y=0}^{m-1} f(x, y) e^{-2\pi i(xu_x/m + yu_y/n)}$$

**Fourier-Spektrum:** Matrix  $S(f) \in \mathbb{R}^{\text{pos}}$  mit

$$\forall (x, y) \in \text{pos} : S(f)(x, y) = |F(f)(x, y)|$$

**Leistungs-Spektrum:** Matrix  $L(f) \in \mathbb{R}^{\text{pos}}$  mit

$$\forall (x, y) \in \text{pos} : P(f)(x, y) = |F(f)(x, y)|^2$$

**Phasen-Spektrum:** Matrix  $\phi(f) \in \mathbb{R}^{\text{pos}}$  mit

$$\forall (x, y) \in \text{pos} : \phi(f)(x, y) = \tan^{-1} \left( \frac{\Im(F(f)(x, y))}{\Re(F(f)(x, y))} \right)$$

# Eigenschaften der 2D-DFT

Fourier-Transformation  $F : \mathbb{R}^{\text{pos}} \rightarrow \mathbb{C}^{\text{pos}}$  mit

$$\forall (u_x, u_y) \in \text{pos} : F(f)(u_x, u_y) = \sum_{x=0}^{m-1} \sum_{y=0}^{m-1} f(x, y) e^{-2\pi i(xu_x/m + yu_y/n)}$$

Für alle Funktionen  $f : \text{pos} \rightarrow \mathbb{R}$  gilt:

- ▶  $F(f)(0, 0) = \max(f)$  (mitunter auch  $\text{avg}(f)$ , je nach Faktor)
- ▶  $F(f)(x, y) = F(f)(-x, -y)$  (symmetrisch)
- ▶  $|F(f)(x, y)| = |F(f)(-x, -y)|$
- ▶  $\forall f, g : \text{pos} \rightarrow \mathbb{R} \forall a, b \in \mathbb{R} :$   
 $F(af + bg)(x, y) = aF(f)(x, y) + bF(g)(x, y)$  (linear)
- ▶  $F(f)(x + m, y + n) = F(f)(x + m, y) = F(f)(x, y + n) = F(f)(x, y)$  (unendlich periodisch in beide Richtungen)

# DFT von Bildern

Bild  $B \in \text{col}^{\text{pos}}$

Fourier-Transformierte  $F(B) \in \mathbb{C}^{\text{pos}}$

$$\forall (x, y) \in \text{pos} : F(B)(x, y) = \sum_{x=0}^{m-1} \sum_{y=0}^{m-1} B(x, y) e^{-2\pi i(xu_x/m + yu_y/n)}$$

mit

Ortsfrequenz  $F(B)(x, y) \in \mathbb{C}$

Spektrum  $|F(B)(x, y)| \in \mathbb{R}$

Phase  $\phi(x, y) = \tan^{-1} \left( \frac{\Im(F(B)(x, y))}{\Re(F(B)(x, y))} \right) \in \mathbb{R}$

# Anwendung in der Bildverarbeitung

**Erkennung** typischer Bildeigenschaften,  
z.B. Größe, dominante Richtungen der Strukturen

**Transformation** eines (Gesamt-)Bildes  $B$  in drei Schritten:

1. Fourier-Transformation  $C = F(B) \in \mathbb{C}^{\text{pos}}$
2. Änderung der Fourier-Transformierten zu  $C'$   
(z.B. Löschen von Teilbildern)
3. inverse Fourier-Transformation  $B' = F^{-1}(C')$

**Kanten-Betonung** durch Entfernen (Wert  $\mapsto 0$ ) niedriger  
Frequenzen (um Ursprung)

**Glättung** durch Entfernen (Wert  $\mapsto 0$ ) hoher Frequenzen  
(entfernt vom Ursprung)

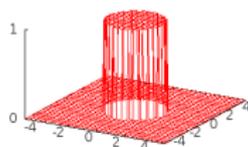
# Transformationen im Frequenzraum

punktweise Transformation  $f : \text{pos} \rightarrow \mathbb{C}$  der Werte der Fourier-Transformierten  $C \in \mathbb{C}^{\text{pos}}$

durch **Multiplikation** mit einer Funktion  $f : \text{pos} \rightarrow \mathbb{R}$ .

Beispiel ( mit Abstand  $d$ , z.B.  $d(u, v) = \sqrt{u^2 + v^2}$  ):

**Tiefpass** mit Schwellwert (Cut-Off-Frequenz)  $\theta \in \mathbb{R}$

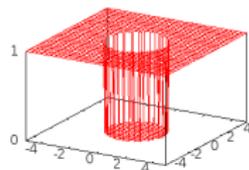


$$f_{T(\theta)}(u, v) = \begin{cases} 1 & , \text{ falls } d(u, v) \leq \theta \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Glättung, aber Ringing-Artefakte möglich

# Mehr Beispiele

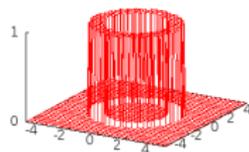
**Hochpass** mit Schwellwert (Cut-Off-Frequenz)  $\theta \in \mathbb{R}$



$$f_{H(\theta)}(u, v) = \begin{cases} 0 & , \text{ falls } d(u, v) \leq \theta \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

Hervorhebung von Kanten

**Bandpass** mit Schwellwerten  $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$



$$f_{B(\theta_1, \theta_2)}(u, v) = \begin{cases} 1 & , \text{ falls } \theta_1 \leq d(u, v) \leq \theta_2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

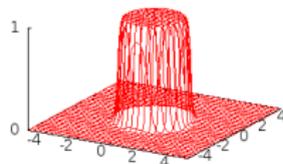
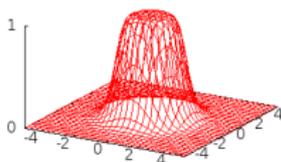
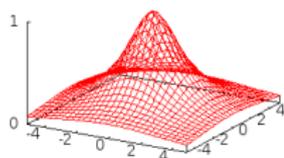
**Bandstop** (analog) mit Schwellwerten  $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$

# Vermeidung von Ringing-Artefakten

Idee:

Wert (Amplitude) bei steigenden / fallenden Frequenzen stetig  
(statt stufenförmig) ändern

Beispiel: Butterworth-Filter



$$f_{T(\theta)}(u, v) = \frac{1}{1 + \left(\frac{d(u,v)}{\theta}\right)^{2n}} \quad (\text{Tiefpass})$$

analog:  $f_{H(\theta)}(u, v) = \frac{1}{1 + \left(\frac{\theta}{d(u,v)}\right)^{2n}} \quad (\text{Hochpass})$

# Ziel: Bildtransformationen im Ortsraum

**Transformation** des Bildes  $B \in \text{col}^{\text{pos}}$  **in drei Schritten**

1. Fourier-Transformation  $F(B) = C \in \mathbb{C}^{\text{pos}}$
2. Änderung der Fourier-Transformierten  $C \in \mathbb{C}^{\text{pos}}$  durch Multiplikation mit einer Funktion  $h'$ :

$$\forall (u, v) \in \text{pos} : C'(u, v) = F(B)(u, v) \cdot h'(u, v)$$

3. inverse Fourier-Transformation (mit  $h' = F(h)$ )

$$B'(x, y) = F^{-1}(F(B) \cdot F(h))(x, y)$$

ersetzen durch

**eine Operation im Ortsraum**  $h : \text{col}^{\text{pos}} \rightarrow \text{col}^{\text{pos}}$  mit

$$\forall B \in \text{col}^{\text{pos}} \forall (x, y) \in \text{pos} : h(B)(x, y) = F^{-1}(F(B) \cdot F(h))(x, y)$$

# Faltungssatz

Wiederholung: Faltung  $f * g$  der Funktionen

$f, g : \{0, \dots, m-1\} \times \{0, \dots, m-1\} \rightarrow \mathbb{R}$  ist definiert durch

$\forall (p_x, p_y) \in \{0, \dots, m-1\} \times \{0, \dots, m-1\} :$

$$(f * g)(p_x, p_y) = \sum_{x=-\infty}^{\infty} \sum_{y=-\infty}^{\infty} f(p_x - x, p_y - y)g(x, y)$$

(assoziativ, kommutativ, linear)

Es gilt der **Faltungssatz**:

$\forall f, g : \text{pos} \rightarrow \text{col} :$

$$\forall (p_x, p_y) \in \text{pos} : F(f * g)(p_x, p_y) = F(f)(p_x, p_y) \cdot F(g)(p_x, p_y)$$

**Faltung im Ortsraum** entspricht **Multiplikation im Frequenzraum**

also  $\forall B : \text{pos} \rightarrow \text{col} \quad \forall h : \text{pos} \rightarrow \mathbb{R} \quad \forall (p_x, p_y) \in \text{pos} :$

$$F(B * h)(p_x, p_y) = F(B)(p_x, p_y) \cdot F(h)(p_x, p_y) = (F(B) \cdot F(h))(p_x, p_y)$$

und damit  $\forall B : \text{pos} \rightarrow \text{col} \quad \forall h : \text{pos} \rightarrow \mathbb{R}$

$$(B * h) = F^{-1}(F(B * h)) = F^{-1}(F(B) \cdot F(h))$$

also Ziel erreicht: Faltung  $B * h$  ersetzt die Operation (drei Schritte)

$$F^{-1}(F(B) \cdot F(h)) : \text{col}^{\text{pos}} \rightarrow \text{col}^{\text{pos}}$$

# Lineare Filter

$$(B * h)(p_x, p_y) = \sum_{x=-\infty}^{\infty} \sum_{y=-\infty}^{\infty} B(p_x - x, p_y - y) h(x, y)$$

mit Koeffizienten  $h(i, j)$

häufiger Spezialfall:

- ▶ Koeffizienten  $h(x, y)$  verschwinden mit größerem Abstand von  $(0, 0)$ , und außerhalb eines Bereiches  $(x, y) \in \{-k, \dots, k\}^2$  gilt  $h(x, y) = 0$
- ▶ Angabe von  $h$  auf dem (quadratischen) Ausschnitt  $(i, j) \in \{-k, \dots, k\}^2$  als  $(2k + 1) \times (2k + 1)$ -Matrix genügt Filterkern, Filtermaske, Filtermatrix, Faltungskern (zentriert um Ursprung, oft symmetrisch) dargestellt als Funktion  $h : \text{pos}' \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\text{pos}' = \{-k, \dots, k\}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

# Lineare Filter

Faltung von Bild  $B$  : pos  $\rightarrow$  col mit Filtermatrix

$$h = \begin{pmatrix} h(-k, -k) & \dots & h(-k, 0) & \dots & h(-k, k) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ h(0, -k) & \dots & h(0, 0) & \dots & h(0, k) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ h(k, -k) & \dots & h(k, 0) & \dots & h(k, k) \end{pmatrix}$$

transformiert jeden Wert  $B(x, y)$  zu

$$\begin{aligned} (B * h)(x, y) &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} B(x - i, y - j)h(i, j) \\ &= \sum_{i=-k}^k \sum_{j=-k}^k B(x - i, y - j)h(-i, -j) \\ &\stackrel{\substack{(i \rightarrow -i) \\ (j \rightarrow -j)}}{=} \sum_{i=-k}^k \sum_{j=-k}^k B(x + i, y + j)h(-i, -j) \end{aligned}$$

(gespiegelte Filtermatrix)

## Lineare Filter – Beispiele

Glättungsfiler ( $3 \times 3$ ) mit normalisierter Filtermatrix, z.B.

$$h_{\text{Box}} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad h_{\text{Circ}} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$h_{\text{Bin}} = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad h_{\text{Gauss}} = \frac{1}{40} \begin{pmatrix} 3 & 5 & 3 \\ 5 & 8 & 5 \\ 3 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

Differenzenfilter ( $5 \times 5$ ) mit normalisierter Filtermatrix, z.B.

$$h_{\text{Laplace}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 16 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

# Lineare Filter

Faltung von Bild  $B$  : pos  $\rightarrow$  col mit  $(3 \times 3)$ -Filtermatrix

$$h = \begin{pmatrix} h(-1, -1) & h(-1, 0) & h(-1, 1) \\ h(0, -1) & h(0, 0) & h(0, 1) \\ h(1, -1) & h(1, 0) & h(1, 1) \end{pmatrix}$$

transformiert jeden Wert  $B(x, y)$  zu

$$B'(x, y) = \sum_{i=-1}^1 \sum_{j=-1}^1 B(x+i, y+j)h(-i, -j)$$

gewichtete Summe aller Bildpunkte im Bereich

$(x-1, x, x+1) \times (y-1, y, y+1)$  (lineare Operation)

meist **normalisierte Filtermatrizen**  $h$  mit  $\sum_{i=-k}^k \sum_{j=-k}^k h(i, j) = 1$

Normierung (für Beispiel  $k = 1$ ):

$$\frac{1}{\sum_{i=-k}^k \sum_{j=-k}^k h(i, j)} \begin{pmatrix} h(-1, -1) & h(-1, 0) & h(-1, 1) \\ h(0, -1) & h(0, 0) & h(0, 1) \\ h(1, -1) & h(1, 0) & h(1, 1) \end{pmatrix}$$

# Faltung am Bildrand

$$B'(x, y) = \sum_{i=-k}^k \sum_{j=-k}^k B(x+i, y+j)h(-i, -j)$$

Problem:

- ▶ an Randpunkten  $(x, y)$  hängt  $B'(x, y)$  von Werten  $B(x', y')$  an Positionen  $(x', y') \notin \text{pos}$  ab.
- ▶  $B(x', y')$  ist dort nicht definiert.

mögliche Lösungen:

- ▶ Randbereiche nicht filtern (Werte  $B(x, y)$  bleiben)
- ▶ spezielle Rand-Filtermasken
- ▶ konstante Fortsetzung auf Positionen außerhalb pos
- ▶ schwarzer Rand (Zero-Padding):  $\forall (x, y) \notin \text{pos} : B(x, y) := 0$
- ▶ gespiegelter Rand:  $\forall (x, y) \notin \text{pos} : B(x, y) := B(-x, y)$   
(bzw. einem der Werte  $B(-x, y)$ ,  $B(-x, -y)$ ,  $B(x, -y)$ )
- ▶ periodisch fortgesetzte Werte
- ▶ Interpolation

# Filter zur Kantenverstärkung

Ziel: Unterschiede zwischen benachbarten Pixeln verstärken

(positive und negative Koeffizienten, Summe aller Koeffizienten = 0)

Beispiele:

Roberts-Operator:  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$  (Summe)

Prewitt-Operator:  $h: \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$   $v: \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Sobel-Operator:  $h: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$   $v: \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Differenz-Filter:  $\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 8 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

# Nichtlineare Filter

Funktion  $f : \text{col}^{\text{pos}} \rightarrow \text{col}^{\text{pos}}$  mit

$$\forall (x, y) \in \text{pos} : f(B)(x, y) = f(B(x - k, y - k), \dots, B(x + k, y + k))$$

nicht durch Faltung mit einer Matrix (lineare Funktion) gegeben,  
sondern nichtlinear

Beispiele: Rangordnungsfilter

$$\text{Minimum: } f(B)(x, y) = \min\{B(x - k, y - k), \dots, B(x + k, y + k)\}$$

$$\text{Maximum: } f(B)(x, y) = \max\{B(x - k, y - k), \dots, B(x + k, y + k)\}$$

$$\text{Median: } f(B)(x, y) = \text{med}\{B(x - k, y - k), \dots, B(x + k, y + k)\}$$

gewichteter Medianfilter, abhängig von Matrix  $h : \{-k, \dots, k\}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ ,  
Gewicht  $(i, j)$  bestimmt Anzahl der Vorkommen des Wertes  
 $B(x + i, y + j)$  in der Medianliste